Quarto appello, Martedì 13 gennaio 2004 – Testi

I Parte.

1. Scrivere lo sviluppo di Taylor in zero all'ordine n di $(1+x)^{-1}$ e di $\log(1-x)$.
2. Calcolare il valore di $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
3. Disegnare il grafico della funzione $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.
4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{a+1} + x^a}\, dx$ è finito.
5. Calcolare le radici quarte complesse di -4.
6. Calcolare $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} x \cos x\, dx$.
7. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(e^{3x} + e^{-3x})}{\log x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x \log x}$.
8. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

II Parte.

1. Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che sia massimo l'ordine di infinitesimo in 0 della funzione

$$f(x) = \int_0^x 1 + \alpha e^t + \beta \sin(\beta t)\, dt\ .$$

   Per tali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, indicare poi la parte principale di f.

2. a) Dato $n \geq 1$ intero, calcolare $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq h\leq n \\ h \text{ pari}}} \binom{n}{h}$.

   b) Dato $n \geq 1$ intero, calcolare $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq h\leq n \\ h\equiv 0 \bmod(4)}} \binom{n}{h}$.

   [*Suggerimento per a): sviluppare* $(1+1)^n$ *e* $(1-1)^n$ *con il binomio di Newton.*]

3. Si definisce il prodotto infinito di una successone di numeri reali a_n come il limite (se esiste)

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{m\to\infty} \prod_{n=0}^{m} a_n\ . \tag{1}$$

   Dimostrare che:
   a) se $a_n \geq 1$ per ogni n allora il limite in (1) esiste ed appartiene a $[1, +\infty]$;
   b) se $a_n \neq 0$ per ogni n ed il limite in (1) esiste ed è finito, allora $a_n \to 1$.
   c) data una successione di numeri reali $b_n \geq 0$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \quad\iff\quad \prod_{n=0}^{\infty}(1 + b_n) < +\infty\ . \tag{2}$$

I Parte.

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!} = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!} = xe^{x^2}$.
3. Siccom $\sin(2x+\pi/2)=\cos(2x)$, si tratta del grafico della funzione coseno "compresso" orizzontalmente di un fattore 2.
4. La parte principale dell'integrando per $x\to 0$ è $1/x^a$, mentre per $x\to+\infty$ è $1/x^{a+1}$. L'integrabilità in 0 si ha per $a<1$, mentre l'integrabilità a $+\infty$ si ha per $a+1>1$. Quindi l'integrale è finito per $0<a<1$.
5. Siccome $-4=re^{\pi i}$, le radici quarte sono $z=\sqrt{2}e^{k\pi i/4}$ con $k=0,\dots,3$, ovvero $z=\pm1\pm i$.
6. $x\cos x$ è una funzione dispari, e quindi l'integrale è nullo.
7. 0, 0, $-\infty$.

II Parte.

1. Calcoliamo lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di $f'(x)$:

$$f'(x)=1+\alpha e^x+\beta\sin(\beta x)=(1+\alpha)+(\alpha+\beta^2)x+\frac{\alpha}{2}x^2+o(x^2)$$

e quindi, tenuto conto del fatto che $f(0)=0$,

$$f(x)=(1+\alpha)x+\frac{\alpha-\beta^2}{2}x^2+\frac{\alpha}{6}x^3+o(x^3)\ .$$

L'ordine di infinitesimo massimo lo si ottiene imponendo che i primi due termini di questo sviluppo siano nulli:

$$\begin{cases}1+\alpha=0\\ \alpha+\beta^2=0\end{cases}\quad\text{ovvero}\quad\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=\pm1\end{cases}$$

In entrambi i casi la parte principale di $f(x)$ è $-x^3/6$.

2. a) Fissato $n\ge1$, indichiamo con S_p e S_d la somma di $\binom{n}{h}$ su tutti gli $h=0,1,\dots,n$ rispettivamente pari e dispari. Sviluppando quindi $(1+1)^n$ e $(1-1)^n$ con la formula di Newton otteniamo

$$2^n=(1+1)^n=\sum_0^n\binom{n}{h}=S_p+S_d\ ,$$
$$0=(1-1)^n=\sum_0^n\binom{n}{h}(-1)^h=S_p-S_d\ .$$

Le incognite S_p ed S_d risolvono il sistema

$$\begin{cases}S_p+S_d=2^n\\ S_p-S_d=0\end{cases}\quad\text{ovvero}\quad\begin{cases}S_p=2^{n-1}\\ S_d=2^{n-1}\end{cases}$$

ed in particolare $\displaystyle\sum_{\substack{0\le h\le n\\ h\text{ pari}}}\binom{n}{h}=S_p=2^{n-1}$.

b) Per ogni $n\ge1$, indichiamo con S_0, S_1, S_2 ed S_3 la somma di $\binom{n}{h}$ su tutti gli $h=0,1,\dots,n$ rispettivamente congrui a 0, 1, 2 e 3 modulo 4. Per quanto visto al punto b)

$$2^{n-1}=S_p=S_0+S_2\ ,\quad 2^{n-1}=S_d=S_1+S_3\ . \tag{3}$$

Per determinare le incognite S_0, S_1, S_2 ed S_3 ci mancano altre due equazioni. Le otteniamo sviluppando $(1+i)^n$ con la formula di Newton:

$$2^{n/2}e^{in\pi/4}=(1+i)^n=\sum_0^n\binom{n}{h}i^h=S_0-S_2+i(S_1-S_3)$$

ovvero

$$2^{n/2}\cos(n\pi/4)=\mathrm{Re}(1+i)^n=S_0-S_2\ ,\quad 2^{n/2}\sin(n\pi/4)=\mathrm{Im}(1+i)^n=S_1-S_3\ .$$

Ricordando la (3) otteniamo quindi i due sistemi

$$\begin{cases}S_0+S_2=2^{n-1}\\ S_0-S_2=2^{n/2}\cos(n\pi/4)\end{cases},\quad\begin{cases}S_1+S_3=2^{n-1}\\ S_1-S_3=2^{n/2}\sin(n\pi/4)\end{cases};$$

infine

$$\begin{cases}S_0=2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\cos(n\pi/4)\\ S_1=2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\sin(n\pi/4)\\ S_2=2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}\cos(n\pi/4)\\ S_3=2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}\sin(n\pi/4)\end{cases}$$

ed in particolare $\displaystyle\sum_{\substack{0\le h\le n\\ h\equiv0\ \mathrm{mod}(4)}}\binom{n}{h}=S_0=2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\cos(n\pi/4)$.

3. a) Se $a_n\ge1$ la successione $\displaystyle\prod_{n=0}^{m}a_n$ è crescente in m, e quindi ammette limite.

b) $\displaystyle\lim_{m\to\infty}a_m=\lim_{m\to\infty}\frac{\prod_{n=0}^{m}a_n}{\prod_{n=0}^{m-1}a_n}=\frac{\lim_{m\to\infty}\prod_{n=0}^{m}a_n}{\lim_{m\to\infty}\prod_{n=0}^{m-1}a_n}=1.$

c) Osserviamo innanzitutto che per ogni $m\ge1$

$$(1+b_1)\cdots(1+b_m)=1+b_1+\cdots+b_n+\text{vari prodotti dei numeri }b_n,$$

quindi $\displaystyle\prod_1^m(1+b_n)\ge\sum_1^m b_n$, e passando al limite per $m\to+\infty$

$$\prod_1^\infty(1+b_n)\ge\sum_1^\infty b_n\ . \tag{4}$$

D'altra parte, la diseguaglianza $1+x\le e^x$ implica che per ogni $m\ge1$,

$$\prod_{n=0}^m(1+b_n)\le\prod_{n=0}^m e^{b_n}\le\exp\Big(\sum_{n=0}^m b_n\Big)$$

da cui segue immediatamente

$$\prod_{n=0}^\infty(1+b_n)\le\exp\Big(\sum_{n=0}^\infty b_n\Big)\ . \tag{5}$$

La (4) e la (5) implicano l'equivalenza in (2).