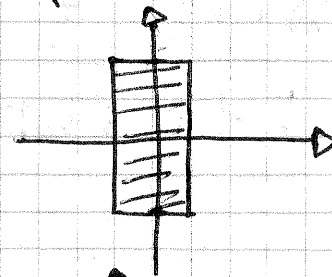
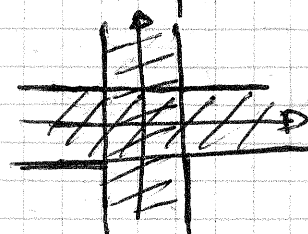
Rappresentare i seguenti sottoinsiemi nel piano cartesiano

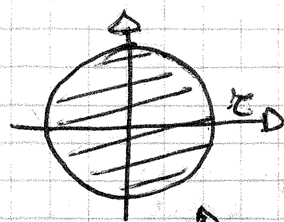
- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\le 1\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|\le 2\}$



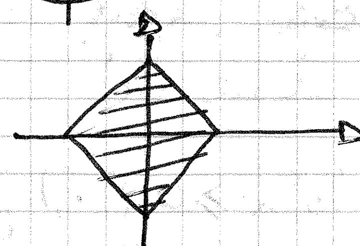
- $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\le 1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|\le 1\right\}$



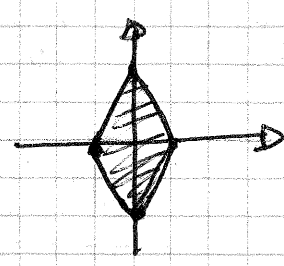
- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le r^2\}$



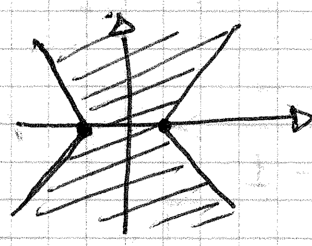
- $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\le 1\right\}$



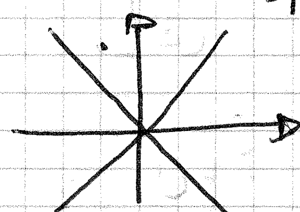
$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2|x|+|y|\le 1\right\}$



$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|-|y|\le 1\right\}$



- $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2=y^2\right\}$



- $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=0\right\}=\{(0,0)\}$

Circonferenza di centro $C(x_0,y_0)$ e raggio r

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

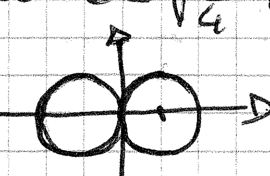
Una generica equazione del tipo

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

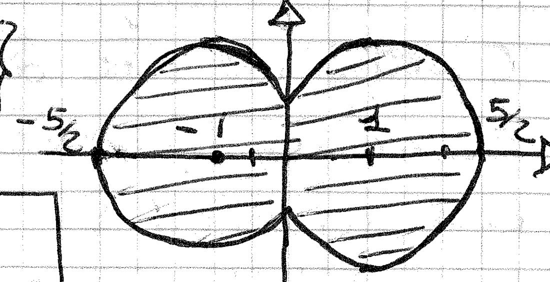
descrive una circonferenza se e solo se $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c>0$

il cui centro è $C\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ e raggio $r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2=4x^2\right\}$$



$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (4x^2+4y^2-5)^2 \le 64x^2\}$$



Verificato che i vettori $(1,2)$ e $(2,-2)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^2$ determinare le componenti del vettore $(-1;3)$ rispetto alla nuova base $B_2=((1,2),(2,-2))$. Ricavare infine le formule del cambiamento di base dalla base canonica $B_1=((1,0),(0,1))$ a B_2.

Svolgimento $\qquad B_2 = ((1,2),(2,-2))$

Valutiamo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2-4 = -6 \neq 0$

i vettori $\vec{v}=(1,2)$ e $\vec{w}=(2,-2)$ sono lin. indip. pertanto costituiscono una base di $\mathbb{R}^2$.

Le componenti del vettore $\vec{u}=(-1,3)$ rispetto alla base B_2 sono 2 scalari $h,K\in\mathbb{R}$ tali che

$$\vec{u} = h\vec{v} + K\vec{w}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = h\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + K\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} h+2K=-1 \\ 2h-2K=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3h=2 \\ K=\dfrac{-1-h}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} h=\dfrac{2}{3} \\ K=-\dfrac{5}{6} \end{cases} \qquad \vec{u}=(-1,3) \underset{B_2}{\equiv} \left(\frac{2}{3};-\frac{5}{6}\right)$$

Sia $\vec{a}=(x,y)$ un generico vettore di $\mathbb{R}^2$. Le componenti di $\vec{a}$ rispetto a B_2, analogamente al caso precedente sono 2 scalari $h,K\in\mathbb{R}$ tali che

$$\vec{a} = h\vec{v} + K\vec{w}$$

Soltanto che $\vec{a}$ non è un vettore assegnato.

Osserviamo che $\vec{a} = (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$

Se, quindi, ricaviamo le componenti dei vettori della base canonica $B_1 = ((1,0),(0,1))$ rispetto alla nuova base B_2

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = h\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} h + 2k = 1 \\ 2h - 2k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3h = 1 \\ k = h \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = 1/3 \\ k = 1/3 \end{cases}$$

$$(1,0) \underset{B_2}{\equiv} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = h\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} h + 2k = 0 \\ 2h - 2k = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3h = 1 \\ k = -\frac{h}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = 1/3 \\ k = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$(0,1) \underset{B_2}{\equiv} \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$$

cioè

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$$

In simboli posto $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$ si ha

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} \qquad \vec{e}_2 = \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{1}{6}\vec{w} \qquad (*)$$

$\vec{a} = (x,y) = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2$ sostituendo le formule $(*)$ che abbiamo ricavato si ha

$$\vec{a} = x\left(\frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}\right) + y\left(\frac{1}{3}\vec{v} - \frac{1}{6}\vec{w}\right)$$

$$\vec{a} = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y\right)\vec{v} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y\right)\vec{w} \equiv h\,\vec{v} + k\,\vec{w}$$

cioè ~~post~~ chiamate (h,k) le componenti del generico vettore $\vec{a} = (x,y)$ rispetto alla base B_2 si ha

$$\begin{cases} h = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y \\ k = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y \end{cases}$$

Le formule $\begin{cases} h = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y \\ k = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y \end{cases}$ sono le formule del cambiamento di base da $B_1 = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ a $B_2 = (\vec{u}, \vec{v})$ che erano state richieste.

Posto $x = -1$ e $y = 3$ si ha $\begin{cases} h = -\frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{2}{3} \\ K = -\frac{1}{3} - \frac{3}{6} = -\frac{5}{6} \end{cases}$

cioè il vettore $(-1, 3) \underset{B_2}{\equiv} \left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}\right)$ componenti che coincidono con quelle determinate al punto precedente. ∎

Determinare le componenti del vettore $\vec{u} = (2, 1)$ rispetto alla base $B = ((1,-1), (2,3))$

$\begin{cases} h + 2K = 2 \\ -h + 3K = 1 \end{cases}$ $\vec{u} \underset{B}{\equiv} \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$

Determinare le formule del cambiamento di base dalla base canonica $\tilde{B} = ((1,0), (0,1))$ alla nuova base $B((1,-1), (2,3))$

$(1,0) \underset{B}{\equiv} \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$

$(0,1) \underset{B}{\equiv} \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$

$\begin{cases} h = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y \\ K = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y \end{cases}$

Si sa che rispetto ad una nuova base B_2 incognita i vettori $(1,0) \underset{B_2}{\equiv} (3, -1)$ e $(0,1) \underset{B_2}{\equiv} (2,5)$. Determinare le formule del cambiamento di base dalla base canonica $B_1 = ((1,0), (0,1))$ alla nuova base B_2. Determinare, inoltre, i vettori incogniti della nuova base B_2.

Sia $B_2 = (\vec{v}, \vec{w})$ $\quad \vec{v} = (v_x, v_y)$ $\quad \vec{w} = (w_x, w_y)$

$(1,0) = 3\vec{v} - \vec{w}$ $\quad (0,1) = 2\vec{v} + 5\vec{w}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x(3\vec{v} - \vec{w}) + y(2\vec{v} + 5\vec{w})$

$\vec{a} = (3x + 2y)\vec{v} + (-x + 5y)\vec{w}$

Le formule del cambiamento di base dalla base canonica B_1 alla nuova base B_2 sono quindi.

$$\begin{cases} h = 3x + 2y \\ k = -x + 5y \end{cases}$$

Determiniamo i vettori $\vec{V} = (V_x, V_y)$ e $\vec{W} = (W_x, W_y)$ in cognita della base B_2. Poiché conosciamo le componenti dei vettori $(1,0)$ e $(0,1)$ rispetto alla base B_2 possiamo scrivere.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} W_x \\ W_y \end{pmatrix}$$

da cui prendendo le equazioni rispettivamente delle prime righe e delle seconde righe, otteniamo i seguenti sistemi

$$\begin{cases} 3V_x - W_x = 1 \\ 2V_x + 5W_x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3V_y - W_y = 0 \\ 2V_y + 5W_y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15V_x - 5W_x = 5 \\ 2V_x + 5W_x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 15V_y - 5W_y = 0 \\ 2V_y + 5W_y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_x = \frac{5}{17} \\ W_x = -\frac{2}{5}V_x = -\frac{2}{17} \end{cases} \qquad \begin{cases} V_y = \frac{1}{17} \\ W_y = 3V_y = \frac{3}{17} \end{cases}$$

Quindi $\vec{V} = \left(\frac{5}{17} ; \frac{1}{17}\right)$ $\quad \vec{W} = \left(-\frac{2}{17} ; \frac{3}{17}\right)$

Determinare le formule del cambiamento di base dalla base canonica $\tilde{B}_0 = ((1,0),(0,1))$ alla seguenti basi

1) $B_1 = ((1,2),(3,5))$

$$\begin{cases} h = -5x + 3y \\ k = +2x - y \end{cases}$$

2) $B_2 = ((1,-2),(3,-4))$

$$\begin{cases} h = -2x - \frac{3}{2}y \\ k = x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

3) $B_3 = ((1,3),(3,8))$

$$\begin{cases} h = -8x + 3y \\ k = 3x - y \end{cases}$$

Determinare le formule del cambiamento di base dalla base canonica $\hat{B} = ((1,0),(0,1))$ alla seguente base.

1) $B_1 = ((2,5),(3,7))$

$$\begin{cases} h = -7x + 3y \\ k = 5x - 2y \end{cases}$$

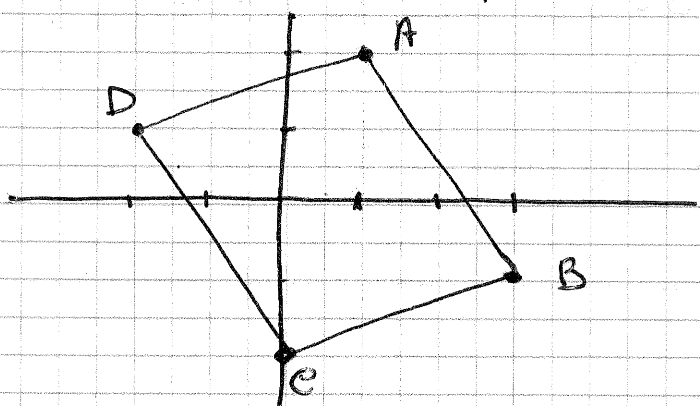
2) $B_2 = ((2,3),(4,5))$

$$\begin{cases} h = -\frac{5}{2}x + 2y \\ k = \frac{3}{2}x - y \end{cases}$$

3) $B_3 = ((1,-2);(3,-4$

$$\begin{cases} h = -2x - \frac{3}{2}y \\ k = x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Calcolare l'area del ~~parallelogramma~~ quadrilatero di vertici $A(1,2)$ $B(3,-1)$ $C(0,-2)$ $D(-2,1)$ dopo aver verificato che è un parallelogramma



Determiniamo i vettori

$\overrightarrow{AB} = (3-1, -1-2) = (2,-3)$

$\overrightarrow{DC} = (0-(-2), -2-1) = (2,-3)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$ Quindi $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

cioè i lati AB e DC sono $\parallel$

Determiniamo i vettori $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AD} = (-2-1, 1-2) = (-3,-1)$ $\quad \overrightarrow{BC} = (0-3, -2-(-1)) = (-3,-1)$

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$ Quindi $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ ed i lati AD e BC sono paralleli. Il quadrilatero $ABCD$ avendo i lati opposti paralleli è un parallelogramma.

$$\text{Area} = \left| \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \right| = |-2-9| = 11$$