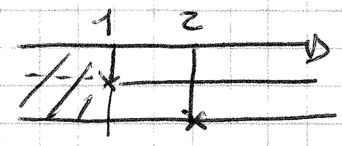
- Campi di esistenza
- formule di derivazione

| limiti di funzioni elementari

Disegnare il grafico delle funzioni

$$f(x)=\frac{1}{\log(x-1)} \qquad f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$y=\frac{1}{\log(x-1)} \qquad C.E. \begin{cases} x-1>0 \\ \log(x-1)\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>1 \\ x-1\neq 1 \end{cases}$$

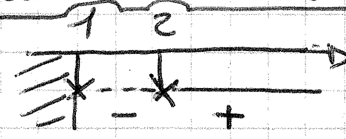


$C.E. = (1,2)\cup(2;+\infty)$ $f(x)$ è continua nel suo dominio

Segno della funzione

$\boxed{C.E. = \text{campo di esistenza o dominio}}$

$$\frac{1}{\log(x-1)}\geq 0 \qquad \log(x-1)>0 \qquad x>2$$



Il grafico della funzione non ha intersezioni con gli assi coordinati.

Calcolo dei limiti in $1, 2, +\infty$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\log(x-1)} \to 0^+ \\ x\to+\infty \end{bmatrix}$$

$$x\to+\infty \Rightarrow (x-1)\to+\infty \Rightarrow \log(x-1)\to+\infty \Rightarrow \frac{1}{\log(x-1)}\to 0^+$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\log(x-1)} \to 0^- \\ x\to 1^+ \end{bmatrix}$$

$$x\to 1^+ \Rightarrow (x-1)\to 0^+ \Rightarrow \log(x-1)\to-\infty \Rightarrow \frac{1}{\log(x-1)}\to 0^-$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\log(x-1)} \to +\infty \\ x\to 2^+ \end{bmatrix}$$

$$x\to 2^+ \Rightarrow (x-1)\to 1^+ \Rightarrow \log(x-1)\to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{\log(x-1)}\to+\infty$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\log(x-1)} \to -\infty \\ x\to 2^- \end{bmatrix}$$

$$x\to 2^- \Rightarrow (x-1)\to 1^- \Rightarrow \log(x-1)\to 0^- \Rightarrow \frac{1}{\log(x-1)}\to-\infty$$

Quindi la retta $x = 2$ è un Asintoto verticale

la retta $y = 0$ è un Asintoto orizzontale

Studio della monotonia di $f(x)$

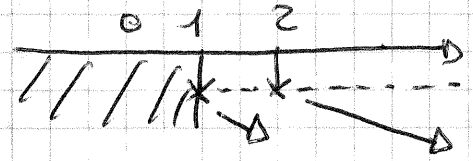
$$D \frac{1}{\log(x-1)} = -\frac{1}{\log^2(x-1)} D \log(x-1) = -\frac{1}{(x-1)\log^2(x-1)}$$

$$\left[D \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f^2(x)} D f(x) \right]$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)\log^2(x-1)}$$

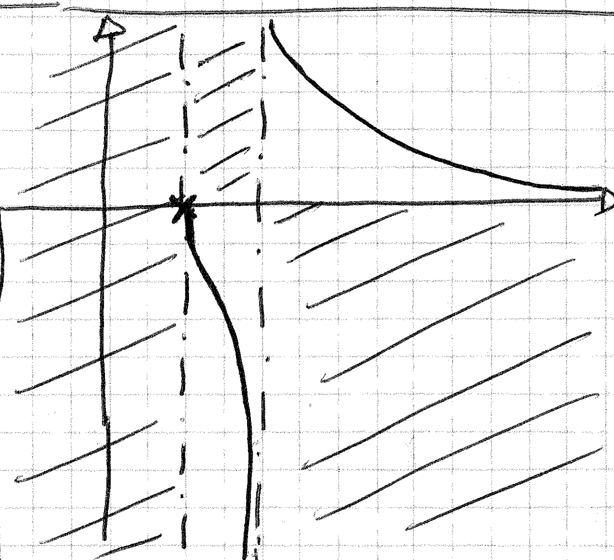
La funzione è derivabile nel suo dominio

$f'(x) \geq 0$



La funzione è strettamente decrescente negli intervalli $(1, 2)$ e $(2, +\infty)$

Grafico di $f(x) = \dfrac{1}{\log(x-1)}$



Algebra degli infiniti e forme indeterminate

$a + \infty = +\infty$ $\quad \forall a \in \mathbb{R}$

$a - \infty = -\infty$

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$\boxed{+\infty - \infty \quad \text{forma indet.}}$

$$a(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$a(-\infty) = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ +\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$(+\infty)(+\infty) = +\infty$

$(-\infty)(-\infty) = +\infty$

$(+\infty)(-\infty) = -\infty$

$(-\infty)(+\infty) = -\infty$

$$\boxed{0 \cdot (\pm\infty) \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \text{forme indeterminate}}$$

$$\begin{cases} f(x) \to +\infty \\ x \to x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{f(x)} \to 0^+ \\ x \to x_0 \end{cases}$$

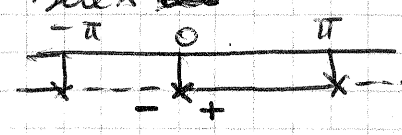
$$\begin{cases} f(x) \to -\infty \\ x \to x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{f(x)} \to 0^- \\ x \to x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) \to 0^+ \\ x \to x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{f(x)} \to +\infty \\ x \to x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) \to 0^- \\ x \to x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{f(x)} \to -\infty \end{cases}$$

Se $f(x) \to 0$ per $x \to x_0$ ma non con un segno determinato in un intorno di x_0 [cioè $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$ in almeno un intorno di x_0] $\frac{1}{f(x)}$ non ha limite per $x \to x_0$. Bisogna allora considerare il limite destro e sinistro e verificare se almeno in un intorno destro (rispettivamente sinistro) la funzione abbia segno costante. Se si verifica tale eventualità si può applicare il teorema citato ai limiti destro e sinistro. Se la funzione continua a cambiare infinite volte segno anche i limiti destro e sinistro non esistono.

$\frac{1}{\operatorname{sen} x} \geq 0$



Esempio $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \to +\infty \\ x \to 0^+ \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \to -\infty \\ x \to 0^- \end{cases}$$

In un intorno dex di 0, ad esempio $(0, \frac{\pi}{2})$, sen x è positiva

In un intorno sin. di 0, ad esempio $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, sen x è negativa

Non esiste perciò il limite per $x \to 0$ di $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Ricordiamo che
$f(x) \to l$ per $x \to x_0$ se e soltanto se

$f(x) \to l$ per $x \to x_0^+$ e $f(x) \to l$ per $x \to x_0^-$

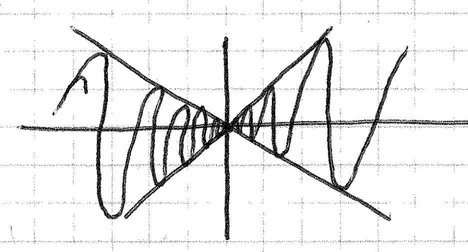
cioè condizione necessaria e sufficiente perchè $f(x) \to l$ per $x \to x_0$ è che esistano e risultino uguali i limiti destro e sinistro. (finiti o anche non finiti; la condizione vale anche per la divergenza).

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} \to +\infty \\ x \to 0^+ \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x^2} \to +\infty \\ x \to 0^- \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{x^2} \to +\infty \\ x \to 0 \end{cases}$$

Se limiti destro e sinistro esistono ma sono diversi allora non esiste il lim di $f(x)$ per $x \to x_0$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \to +\infty \\ x \to 0^+ \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} \to -\infty \\ x \to 0^- \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nexists \text{ il limite di } \frac{1}{x} \text{ per } x \to 0$$

Un esempio "patologico" di funzione che tende a zero ma cambiando infinite volte segno in un intorno del punto x_0 è la funzione
$f(x) = x \,\mathrm{sen}\, \frac{1}{x}$, $x = 0$



$\lim_{x \to 0} x \,\mathrm{sen}\, \frac{1}{x} = 0$

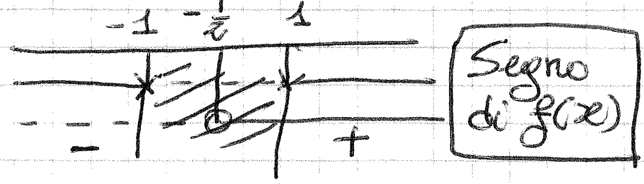
Quindi non esiste il limite per $x \to 0$ di $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x \,\mathrm{sen}\, \frac{1}{x}}$ nè possono esistere il limite destro o il limite sinistro.

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad C.E. \begin{cases} \sqrt{x^2-1} \neq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \iff x^2-1>0$$

$$C.E. = (-\infty; -1) \cup (1, +\infty) = D_f$$

f è continua nel suo dominio

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-1}} \geq 0 \qquad \begin{matrix} N \geq 0 & x \geq -\frac{1}{2} \\ D > 0 & \sqrt{x^2-1} > 0 \end{matrix}$$



Non ci sono intersezioni con gli assi

Calcoliamo i limiti

$$\begin{cases} f(x) \to +\infty \\ x \to 1^+ \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) \to -\infty \\ x \to -1^- \end{cases}$$

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}} \frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{x}{|x|} \frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}} \quad \forall x \in D_f$$

quindi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} \frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}, & \text{per } x>1 \\ \frac{x}{|x|} \frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}, & \text{per } x<-1 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}}$$

Ne deduciamo che

$$\begin{cases} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-1}} \to 2 \\ x \to +\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-1}} \to -2 \\ x \to -\infty \end{cases}$$

Le rette $y=2$ Asintoto orizzontale destro

$y=-2$ Asintoto orizzontale sinistro

$x=1$ Asintoto verticale destro

$x=-1$ Asintoto verticale sinistro

$$D\,\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\left[D(2x+1)\right]\sqrt{x^2-1} - (2x+1)\,D\sqrt{x^2-1}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} =$$

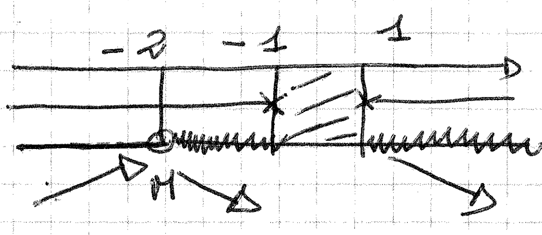
$$= \frac{2\sqrt{x^2-1} - (2x+1)\,\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}}{(x^2-1)} = \frac{2\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2 - x(2x+1)}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{\cancel{2x^2}-2-\cancel{2x^2}-x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = -\frac{(2+x)}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$f'(x) = -\frac{(2+x)}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

la funzione f è derivabile nel suo dominio

$f'(x) \geq 0$

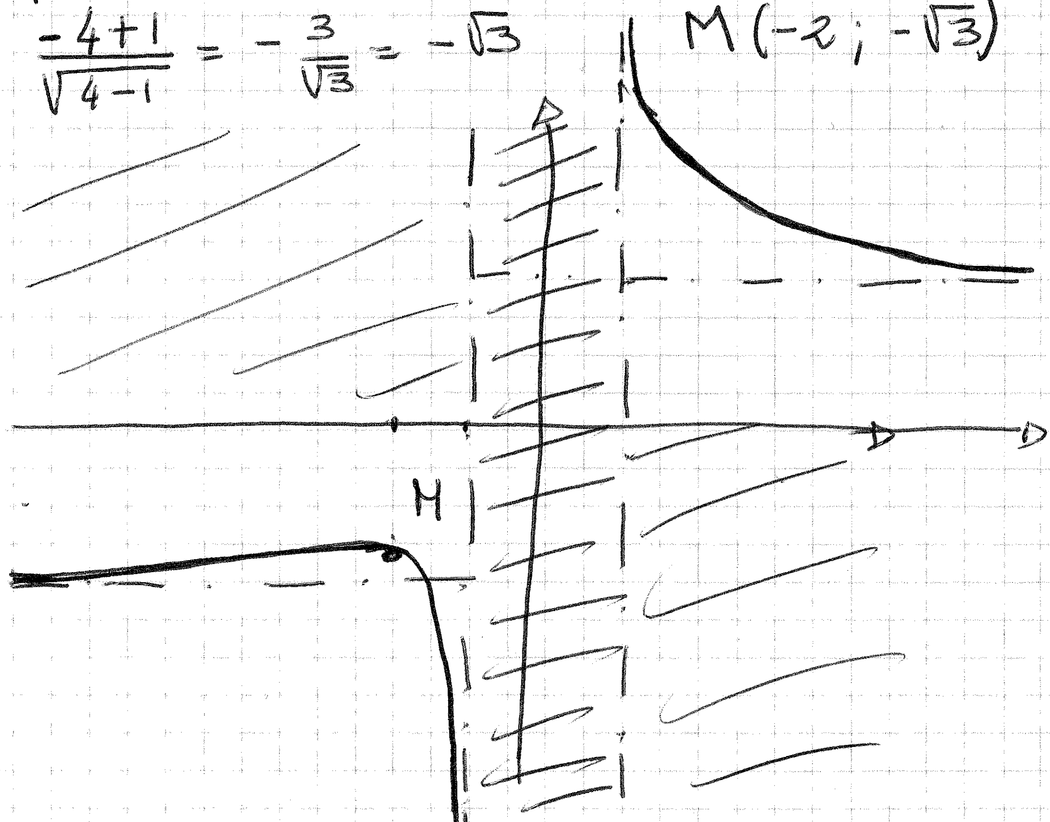


f è strett. cresc in $(-\infty, -2]$

f è strett decresc. in $[-2, -1)$ e in $(1, +\infty)$

$x = -2$ punto di Max rel.

$f(-2) = \dfrac{-4+1}{\sqrt{4-1}} = -\dfrac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ $\quad M(-2; -\sqrt{3})$



6)