

Corso di Matematica per Scienze geologiche - anno 2003-04
Primo compito - 6 novembre 2003 - Tema n.2

Esercizio 1 Determinare i numeri $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} x - 2 \leq 2x \\ 2x < -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 2 Trovare le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione

$$|x + 1| - 2(|x| - 3) = 0.$$

Esercizio 3 Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore, stabilendo se si tratti di massimo o di minimo, dell'insieme

$$A = \{x + y : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < 1\}.$$

Esercizio 4 Dimostrare che il numero d_n delle diagonali di un poligono regolare di n lati è

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Esercizio 5 La funzione

$$f(x) = -\sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

è iniettiva? Qual'è la sua immagine Y ? Provare che la restrizione di f alla semiretta $[0, \infty[$ è iniettiva e scriverne l'inversa $f^{-1} : Y \rightarrow [0, \infty[$.

Esercizio 6 Verificare che

$$2^n < \binom{2n}{n} < 4^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2.$$

Esercizio 7 Determinare la simmetrica della retta $r \subset \mathbb{R}^2$ di equazione $x - y + 1 = 0$ rispetto alla retta di equazione $x - \sqrt{3}y = 0$.

Esercizio 8 Calcolare l'area del parallelogramma generato dai vettori OP e OQ , ove $O = (0, 0)$, $P = (4, 2)$ e $Q = (-1, 5)$.

Esercizio 9 Determinare il piano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ passante per $(10, 1, -10)$ e perpendicolare alla retta di equazioni parametriche

$$x = 2, \quad y = 1 + t, \quad z = 2 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 10 Data l'ellisse di equazione $4x^2 + 9y^2 = 1$, se ne trovino i fuochi e le intersezioni con gli assi.