Matematica, Anno Accademico 2003-2004, Geo***

P. Acquistapace, V.M. Tortorelli

I foglio di esercizi: V.M. Tortorelli
dal 2 ottobre 2003 al 9 ottobre 2003

Programma e materiale relativo al corso essere reperito in rete selezionando nella Pagina del Dipartimento la voce Materiale Didattico (http://WWW.dm.unipi.it/didactics/home.html) e quindi selezionando ALTRI CORSI DI LAUREA e Corso di laurea *****

ESERCIZIO n. 1 Si verifichino le seguenti identità:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy,\ x^2 - y^2 = (x-y)(x+y),$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2),\ x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$\tfrac{x}{x-2} = 1 + \tfrac{2}{x-2},\ \tfrac{x^3-8}{x^2-1} = x + \tfrac{x-8}{x^2-1}$$

DEFINIZIONE: dato $y \in \mathbf{R}$ si dice che $x \in \mathbf{R}$ è la sua *radice quadrata* se:
1) $x \geq 0$,
2) $x^2 = y$. Si scrive $x = \sqrt{y}$.

TEOREMA: Ogni numero reale non negativo ha un'unica radice quadrata.

ESERCIZIO n. 2 Si provi che :
- un numero reale negativo non ha radice quadrata;
- il numero $\sqrt{2}$ non è razionale (rapporto di numeri interi).

ESERCIZIO n. 3 - Dati a, b, c, con $a > 0$, si trovino in dipendenza i tre numeri dati altri tre numeri α, β, γ per cui:

$$ax^2 + bx + c = (\alpha x + \beta)^2 + \gamma$$

- Si tovi una formula risolutiva per le soluzioni *reali* dell'equazione $ax^2 + bx + x = 0$, e si dica quando ha senso.
- Si verifichi che se $x^2 + sx + p = 0$ allora s è 'meno la somma delle soluzioni' e p 'il prodotto delle soluzioni'.

ESERCIZIO n. 4 Si disegnino i sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ dati da

$$\{x \in \mathbf{R} :\ x^2 + 3x - 10 > 0\},\ \{x \in \mathbf{R} :\ \tfrac{x^3+27x}{x-10} > 0\},\ \{x \in \mathbf{R} :\ \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+3} > 0\}$$

ESERCIZIO n. 5 Quali dei seguenti insiemi sono limitati?

$$\{x \in \mathbf{R} :\ x > 1\},\ \{x \in \mathbf{R} :\ 0 > x > 1\},\ \{x \in \mathbf{R} :\ 2 > x > 1\},\ \{x \in \mathbf{R} :\ x^2 + 14 = 0\}$$
$$\{x \in \mathbf{R} : x^7 + x^3 = x^2\},\ \{x \in \mathbf{R} :\ 2 > \tfrac{x-1}{x-2} > 1\},\ \{x \in \mathbf{R} :\ 2 > \tfrac{x^3-1}{x^2-2} > 1\},$$

ESERCIZIO n. 6 Trovare estremo superiore ed inferiore degli insiemi e dire se sono rispettivamente massiomo e minimo:

$\{z \in \mathbf{R}: \ z = \frac{xy}{x^2+y^2} : \ 0 < x, \ y < 1\}$, $\{z \in \mathbf{R}: \ z = \frac{xy}{x+y} : \ 0 < x, \ y < 1\}$,
$\{z \in \mathbf{R}: \ z = \frac{nm}{n^2+m^2} : \ n, \ m = 1, \ 2...\}$, $\{z \in \mathbf{R}: \ z = \frac{nm}{n+m} : \ n, \ m = 1, \ 2...\}$,
$\{z \in \mathbf{R}: \ z = \frac{m-2}{3n} : \ n, \ m = 1, \ 2...\}, \{z \in \mathbf{R}: \ z = \frac{1}{n} + (2m+1)\frac{\pi}{2} : n, m = 1, \ 2\ldots\}$,
$\{x \in \mathbf{R}: \ |x^2+1| < |x-3| - 1\}$, $\{x \in \mathbf{R}: \ |x^2| < \left|x - \frac{3}{x}\right| - 1\}$,
$\{x \in \mathbf{R}: \ |x^2-1| < |x+3| - 2\}$, $\{x \in \mathbf{R}: \ : 4 > |1-x||1+x| + (1-x)^2\}$
$\{x \in \mathbf{R}: \ x^2 + |x-1| < 2\} \cap \mathbf{Q}$

ESERCIZIO n. 7 - Dati $a_1 \neq a_2$ trovare il più grande y per cui $|x-a_1| + |x-a_2| \geq y$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ (per ogni punto la somma delle distanze dai punti dati sia più grande di y).

*- Si generalizzi se sono dati n punti diversi $a_1, \ a_2, \ldots a_n$.

ESERCIZIO n. 8 - Si provi per induzione: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- Si provi $1 + x + \ldots x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$, e quindi generalizzando la prima parte dell' esercizio n. 1 si mostri che : $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + x^{n-k-1}y^k + ... + y^{n-1})$.
(Che dire su $x^n + y^n$?)

ESERCIZIO n. 9 - Si provi per induzione $(1+x)^n \geq 1 + nx$ se $x \geq 0$
- Si provi che vale anche se $x > -1$.

ESERCIZIO n. 10 Si provi per induzione:
$1 + 2x + 3x^2 + \ldots nx^{n-1} = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$, $(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$
$n! \leq n^n \leq \frac{(2n)!}{n!}$.

ESERCIZIO n. 11 Dato $x \in \mathbf{R}$ si definisce *parte intera* di x l'unico numero n intero $x - 1 < n \leq x$. Se $c_0 = [x]$, $c_n = [10^n(x-c_0) - 10^{n-1}c_1 \ldots - 10c_{n-1}]$ allora $x = c_0, c_1c_2c_3\ldots$.

ESERCIZIO n. 12 - Si provi che $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, se $x, \ y \geq 0$ e se ne dia un'interpretazione geometrica.
- Si consideri la seguente proprietà D_n:
comunque siano dati n numeri non negativi si ha $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + ... x_n}{n}$.
- Si provi che se vale D_n vale D_{2n}.
- Si provi che se vale D_{n+1} vale D_n. Si deduca che per ogni n vale D_n.

ESERCIZIO n. 13 * - Si usi la proprietà provata nel precedente esercizio per mostrare che $\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ (se $n > 1 - x$),
$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+1}$, $\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n+1]{n+1}$ (se $n \geq 4$).