Matematica, Anno Accademico 2003-2004, Scienze Geologiche
V.M. Tortorelli

VIII foglio di esercizi: V.M. Tortorelli
dal 9 dicembre 2003 al 16 dicembre 2003

DEFINIZIONE: Una funzione $x \mapsto F(x)$ definita su un intervallo I si dice *primitiva sull'intervallo* di una funzione $x \mapsto f(x)$ se: F è derivabile su I e $F' = f$ su I. La *famiglia delle primitivedi* f su un intervallo si indica con $\int^x f$
TEOREMA [FONDAMENTALE DEL CALCOLO: area calcolata con le primitive]
Se f è continua su $[a;b]$ allora:
 i- La funzione integrale $\int_a^x f(y)dy$ è una primitiva
 ii- Poichè le primitive su un intervallo diffreiscono per una costante per ogni altra F primitiva di f su $[a;b]$ si ha: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

ESERCIZIO n. 1 a- [PRIMITIVE DI BASE] Si determinino le primitive nulle in $x = 0$ delle seguenti funzioni: e^x, x^2, $\sqrt{x}$, x^a $(a \neq -1)$, $\frac{1}{x+1}$, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{\cos^2 x}$, $1+\tan^2 x$, , $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ [R. $\log(x+\sqrt{1+x^2})$: l'inversa dell' *arcosenoiperbolico* : $\mathrm{arsinh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$].

b- [SOSTITUZIONE] Si risponda allo stesso quesito nei casi seguenti tenendo presente la *regola della catena* $F(x) = G(t(x))$: $\frac{dF}{dx}(x) = \frac{dG}{dt}(t(x))\frac{dt}{dx}(x)$, $t = t(x)$:
$2xe^{x^2}$, $10x(1+x^2)^4$, $\sqrt{5x+9}$, $\frac{1}{\sqrt{5x+9}}$, $\frac{1}{5x+e}$, $\frac{4x}{144+x^2}$, $\frac{\log(1+x)}{1+x}$, $\tan x$, $\frac{g'(x)}{g(x)}$, $e^{2x}\cos e^{2x}$, $\cos x \sin^{501} x$, $\frac{1}{144+x^2}$, $\frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}}$, $\frac{\cos x}{\sqrt{9-\sin^2 x}}$, $\sin^2 x$ $[1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x]$, $\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}$.

c- [RAZIONALI SEMPLICI] $\frac{x}{(x^2+1)^n}$, $\frac{1}{(x+1)^n}$, $\frac{1}{x^2-1}$, $\frac{x}{1+x}$, $\frac{x+4}{(x+1)^2-6(x+1)}$, $\frac{1}{x^2+1}$, $\frac{1}{x^4+1}$, $\frac{1}{(x^2+1)^2}$.

d- [PARTI] Si risponda allo stesso quesito nei casi seguenti tenendo presente la regola della *derivata di un prodotto* $F' = G'H = (GH)' - GH'$
$x\sin x$, xe^x, x^2e^x, $x^3\cos x$, $x\sin^2 x$, $\mathrm{arsin}x$, $x^a\log x$, $\log^2 x$, $e^x(1+x)\log x$, $\sin ax\cos bx$

e- [SOSTITUZIONE INVERSA] $G(t) = F(x(t))$: $\frac{dF}{dx}(x(t)) = \frac{dG}{dt}(t)\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^{-1}$, $x = x(t)$, per avere la risposta bisogna quindi trovare l'inversa di $t \mapsto x(t)$:
$\frac{\sqrt{2+x}}{1+x}$ $[x = t^2 - 2]$, $\frac{1}{1+\tan^2 x}$ $[x = \mathrm{artan}\ t]$, $\sqrt{1-x^2}$ $[x = \cos t]$, $\cos(\log(x+1))$ $[x+1 = e^t]$

ESERCIZIO n. 2 Si provino le formule: $\int \log^n x = x\log^n x - n\int \log^{n-1} + c$, $\int x^n e^x = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x$, $\int x\sin x = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x$, $\int x^a\log^n x = \frac{x^{a+1}\log^n x}{a+1} - \frac{n}{a+1}\int x^a\log^{n-1} x$

RICETTE Se $R(x,y)$, $R(x,y,z)$ sono rapporto di due polinomi le primitive di una funzione del tipo $R(\cos x, \sin x)$ si trovano con la sostituzione $t = \tan\frac{x}{2}$, di una del tipo $R(x, \sqrt{1-x^2})$ con $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ o $x = \sin t$, di una $R(x, \sqrt{1+x^2})$ con $t = x + \sqrt{1+x^2}$, di $R(x, \sqrt{x^2-1})$ con $t = \sqrt{\frac{x-1}{1+x}}$, di $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n}{m}}\right)$ con $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$, di $R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})$ con $t = \sqrt{ax+b}$.
Inoltre di molte funzioni non si possono calcolare le primitive. Esempi: $\frac{1}{\sqrt{a_0 + \ldots a_n x^n}}$, $\frac{e^x}{x}$, $e^{\pm x^2}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$.

ESERCIZIO n. 3 Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\log x}},\ \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx,\ \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{1+x^2}},\ \int_0^1 \mathrm{arsin}^4 x dx$$

.

ESERCIZIO n. 4

ESERCIZIO n. 5

ESERCIZIO n. 6

ESERCIZIO n. 7

ESERCIZIO n. 8

ESERCIZIO n. 9

ESERCIZIO n. 10

ESERCIZIO n. 11

ESERCIZIO n. 12

ESERCIZIO n. 13

ESERCIZIO n. 14

ESERCIZIO n. 15

ESERCIZIO n. 16

ESERCIZIO n. 17

ESERCIZIO n. 18

ESERCIZIO n. 19

ESERCIZIO n. 21

ESERCIZIO n. 22

ESERCIZIO n. 23