Matematica, Anno Accademico 2007-2008, Scienze Geologiche

L. Caputo, D.Iacopini, V.M. Tortorelli

Seconda prova scritta **B**

11 febbraio 2008

ISTRUZIONI

a: dopo aver scritto nome cognome e numero di matricola,

b: giustificando i principali passaggi si risolvano i seguenti esercizi riportando le soluzioni sul presente foglio:

c: l'unico da consegnare.

ESERCIZIO 1. Si calcoli l'area della regione determinata dalle condizioni $x^2 + z^2 = 4$, $-1 \le y \le x + z + 1$.

ESERCIZIO 2-a Si trovino le soluzioni del sistema differenziale:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

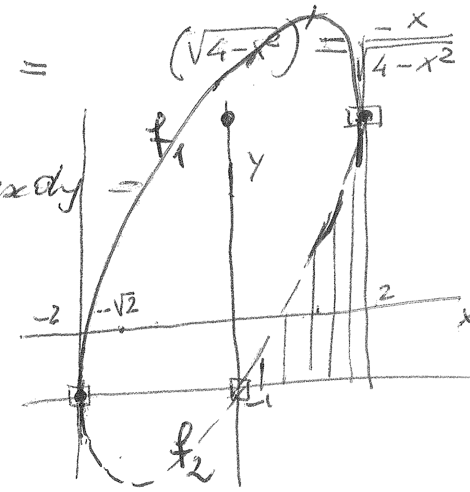
2-b Si disegni in modo approssimativo il comportamento delle traiettorie del sistema, mettendo in risalto eventuali comportamenti notevoli.

---

1) Si tratta dell'area dell'unione dei due grafici $g_1(x,y) = \sqrt{4-x^2}$, $g_2(x,y) = -\sqrt{4-x^2}$ rispettivamente su $-1 \le y \le x + \sqrt{4-x^2} + 1$, $|x| \le 2$ e $-1 \le y \le x - \sqrt{4-x^2} + 1$, $|x| \le 2$

$$\iint_{D_1} \sqrt{1 + \left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right|^2 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy + \iint_{D_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy =$$

$$(\sqrt{4-x^2})' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$



$$= \iint_{-1 \le y \le x + \sqrt{4-x^2}+1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2}}\, dx\,dy + \iint_{-1 \le y \le x - \sqrt{4-x^2}+1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2}}\, dx\,dy =$$

$$= \iint_{-1 \le y \le x + \sqrt{4-x^2}+1} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx\,dy + \iint_{-1 \le y \le x - \sqrt{4-x^2}+1} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx\,dy$$

$f_1(x) = x + \sqrt{4-x^2} + 1$ $\quad f_2(x) = x - \sqrt{4-x^2} + 1$

$f_1(-2) = -1$, $f_1(2) = 3 = f_1(0)$ $\quad f_2(-2) = -1 = f_2(0)$, $f_2(2) = 3$

$f_1' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \ge 0$ $\sqrt{4-x^2} \ge x$, $\sqrt{2} \ge x$ $\quad f_2' = 1 + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \ge 0$, $x \ge -\sqrt{4-x^2}$ $\begin{cases} x \ge 0 \text{ ok} \\ x < 0 \quad |x| \le \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x \ge -\sqrt{2} \end{cases}$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-1}^{x + \sqrt{4-x^2}+1} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\, dy\,dx + \int_{0}^{2} \int_{-1}^{x - \sqrt{4-x^2}+1} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\, dy\,dx =$$

- $\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$ DISPARI

$$= \int_{-2}^{2} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\left(x + \sqrt{4-x^2} \cancel{+1} \cancel{-1}\right) dx + \int_{0}^{2} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\left(x - \sqrt{4-x^2} \cancel{+1} \cancel{-1}\right) dx$$

- $\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = -2\left(\sqrt{4-x^2}\right)'$

$$= \int_{-2}^{2} 2\, dx - \int_{0}^{2} 2\, dx - 2\int_{0}^{2} \left(\sqrt{4-x^2}\right)' dx = 4 + 4 = 8$$