ESERCITAZIONI DEL 14 -12-2007

Derivazione dal teorema delle funzioni implicite delle condizioni necessarie affinche' un punto (x_0,y_0) sia un punto di estremo relativo per la funzione f ristretta al vincolo g(x,y)=0.

Caso semplice:

Sia f una funzione Є $C^1(D)$ che e' un aperto di IR^2. Sappiamo bene dove e come andare a cercare gli eventuali punti (x_0,y_0) di massimo e di minimo della funzione f: se il punto (x_0,y_0) e' di max o minimo relativo allora il gradiente nel punto di f e' zero e mi debbo studiare il carattere dell'Hessiano nell 'intorno del punto (x_0,y_0) .

Se vogliamo studiare gli estremi di f lungo una curva di IR^2 o lungo una frontiera di D (che e' una curva) allora sono necessarie ulteriori condizioni sufficienti che ci assicurino effettivamente che i punti sono di massimo o di minimo relativo per la funzione obiettivo.

Caso 1:

Se la curva lungo cui calcolare gli estremi relativi di f ha una rappresentazione parametrica del tipo (x(t),y(t)) dove t e' un parametro appartenente ad un opportuno intervallo [a,b] allora per valutare la funzione di f lungo la curva devo andarmi a studiare la funzione composta h(t)= f(x(t),y(t)). Affinché un punto (x_0,y_0) sia di max o di minimo interno alla curva (t_0 Є [a,b]) deve essere h'(t)=0.

Quindi

$$f_x(x_{0,}y_0)x'(t_0)+f_y(x_{0,}y_0)y'(t_0)=0 \qquad (1)$$

Questo significa che la funzione f avra gradiente ortogonale alla curva nel punto in questione.

Caso 2:

Supponiamo invece che l'insieme di IR2 in cui vogliamo studiare gli estremi di f sia data definito tramite un equazione

$$G(x,y)=0 \qquad (2)$$

chiameremo il luogo geometrico dato dall' equazione sopra definita "vincolo".

Quando il suo gradiente e' NON nullo, per il teorema delle funzione implicite, questa equazione definisce una curva regolare la cui tangente in ogni punto (x_0,y_0) del vincolo ha direzione parallela al vettore cosi definita : $(-g_y(x_0,y_0),g_x(x_0,y_0))$. Questo significa che se (x_0,y_0) e' un punto sul vincolo sul quale il gradiente di g e' non nullo, e nel quale e' assunto punto di massimo o di minimo per la funzione f rispetto ai punti del vincolo, allora deve essere . Ora $(-g_y,g_x)$ e' per forza ortogonale alla funzione ∇g percio ∇g e ∇f *sono paralleli nel punto* (x_0,y_0).

Percio ottengo la seguente proposizione fondamentale:

Proposizione :

Sia D un aperto di IR^2 Є $C^1(D)$. Condizione necessaria affinche' un punto (x_0,y_0) Є D sia un estremo relativo per la funzione f(x,y) ristretta al vincolo G(x,y)= 0, e' che sia verificata una delle due seguenti condizioni:

a) *$g(x_0,y_0)=0$ e $\nabla g(x_0, y_0) = (0,0)$;*

b) *Esiste un valore λ_0 Є IR, tale che la funzione $H(x,y,\lambda)= f(x,y)+ \lambda g(x,y)$ abbia gradiente nullo nel punto (x_0,y_0,λ_0) ovvero questa terna di valori soddisfi il sistema:*

$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x = 0 \\ f_y + \lambda g_y = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

Esercizi svolti :

1) Determinare eventuali punti massimo e minimo relativo della funzione :

$z = f(x, y) = 2x^2 - y^2 + xy - 8x + 10$
sottoposta al vincolo lineare
$g(x, y) = 2x + y - 2 = 0$.

n.b: Questo caso e' estremamente semplice in quanto dal vincolo si esplicita una variabile in funzione dell' altra sostituendola nell'espressione della funzione data. Ottengo una funzione in una variabile. L'esercizio diventa cosi lo studio dei punti critici della mia nuova funzione.

2) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo della funzione

z=f(x,y)=y+x

sottoposta al vincolo non lineare rappresentato dalla funzione

$g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$

n.b : Qui il vincolo e' piu complesso devo applicare la proposizione sopra enunciata per il calcolo dei moltiplicatori di Lagrange.

3)
Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo della funzione

$z = f(x, y) = x + y^2$
sottoposta al vincolo non lineare rappresentato dalla funzione :
$g(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$

n.b: in realtà oltre al metodo definito in proposizione si nota che parametrizzando la funzione con $x = 5 \sin t$ e $y = 5 \cos t$, si ritorna al caso 1, cioe' di una funzione composta in una variabile t di cui si studiano i punti critici e dunque l'Hessiano...