Calcolo Differenziale ed Integrazione: compito del 7-06-2002.

NOME COGNOME

Matricola n.

ESERCIZIO n. 1

a- Si studi in quale sottoinsieme A di $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è definita a valori reali la funzione:

$$g(x,y) = \int_x^y \frac{1}{z(2+\cos z)} dz$$

b- Posto: $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)g(x,y) \ , & \text{se } (x,y) \in A \\ & , \\ 0 \ , & \text{se } x = y = 0 \end{cases}$ si studi la continuità di f in $(0,0)$

e l'esistenza delle derivate direzionali di f in $(0,0)$.

---

a. $1 \leq 2 + \cos z \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3|z|} \leq \frac{1}{|z|(2+\cos z)} \leq \frac{1}{|z|} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{1}{3}\log y/x \leq g(x,y) \leq \log y/x \ ; \ 0 < x \leq y \\ \log y/x \leq g(x,y) \leq \log y/x < 0 \ ; \ x \leq y < 0 \end{cases}$

Se $x \cdot y = 0$ l'integrale non è finito. E.g. $y > 0$, $x = 0$ $\int_0^y \frac{dz}{z(2+\cos z)} dz = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^y \frac{dz}{z(2+\cos z)} \geq$

$\geq \frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \log y/\varepsilon = +\infty$

Se $x \cdot y < 0$ l'integrale non è definito. E.g. $x < 0 < y$ $\int_x^y \frac{dz}{z(2+\cos z)} = \int_0^y \frac{dz}{z(2+\cos z)} + \int_x^0 \frac{dz}{z(2+\cos z)} = +\infty - \infty$.

b.

- $f(x,x) = 2x\, g(x,x) = 2x \int_x^x \frac{dz}{z(2+\cos z)} = 0$, $x > 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x,x) = 0$

  Per $x > 0$, essendo $e^{-1/x^2} < 1$, si ha $f(x, x e^{-\frac{1}{x^2}}) \leq x(1 + e^{-\frac{1}{x^2}})(-\frac{1}{x^2}) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$.

  Quindi $\nexists \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$, in quanto per $x \to 0^+$: $(x,x) \to (0,0)$, $(x, x e^{-\frac{1}{x^2}}) \to (0,0)$.

- Le direzioni ammissibili per avere derivate direzionali in $(0,0)$ sono solo quelle definite da $a^2 x = b^2 y$; $a \cdot b \neq 0$, altrimenti l'incremento in $(0,0)$ fa uscire dal dominio.

$$\frac{f(x, m^2 x) - f(0,0)}{x} \sqrt{1+m^4} = \sqrt{1+m^4}\,(1+m^2) \int_x^{m^2 x} \frac{dz}{z(2+\cos z)} = \sqrt{1+m^4}\,(1+m^2) \int_1^{m^2} \frac{d\tau}{\tau(2+\cos x\cdot\tau)}$$

essendo $|\cos x\cdot\tau - 1| = |\cos x\cdot\tau - \cos 0| \leq |\tau|\cdot|x| \leq m^2 \cdot |x|$ si ha $\cos \tau x \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ uniformemente in $\tau \in [1; m^2]$. Quindi l'integrale converge all'integrale del limite:

$$\frac{f(x, m^2 x) - f(0,0)}{x} \sqrt{1+m^4} \longrightarrow \sqrt{1+m^4}\,(1+m^2) \frac{1}{3} \log m^2 .$$

Calcolo Differenziale ed Integrazione: compito del 7-06-2002.

NOME COGNOME

Matricola n.

ESERCIZIO n. 2

a) Si calcoli il limite puntuale della successione di funzioni $f_n(t) = ne^{-n^2(t-\frac{1}{n})^2}$, $n \in \mathbf{N}$ e se ne discuta la convergenza uniforme su intervalli e semirette.

b) Siano $g_n(x,y) = f_n(x \cdot y)$, $A = \{(x,y) : 0 \le x \le y\}$ e $B = \{(x,y) : 0 \le x \le y \le 2x\}$. Si studi la finitezza dei seguenti integrali:

$$\int_A g_n(x,y)\,dxdy\ , \quad \int_B g_n(x,y)\,dxdy.$$

c) Si studi il limite: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_B g_n(x,y)\,dxdy.$

---

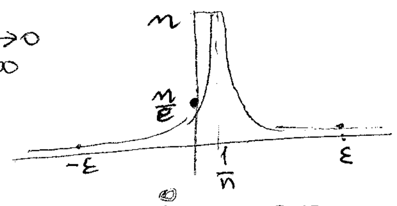
a. • Per $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $f_n(t) = n e^{-(nt-1)^2} \le n e^{-||nt|-1|^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

• Per $t=0$ $f_n(0) = \frac{n}{e} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

• $f'_n(t) = -2n^2(nt-1)e^{-(nt-1)^2} > 0 \iff t > \frac{1}{n}$: $f_n \nearrow]-\infty;\frac{1}{n}]$, $f_n \searrow [\frac{1}{n};+\infty[$, $\max f_n = n$

Essendo $f_n(\frac{1}{n}+\delta) = f_n(\frac{1}{n}-\delta)$, ne segue per $\varepsilon > 0$, $n \ge \frac{1}{\varepsilon}$:

$\sup_{|t|\ge\varepsilon} |f_n| = \max_{|t|\ge\varepsilon} f_n = \max\{f_n(\varepsilon), f_n(-\varepsilon)\} = f_n(\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

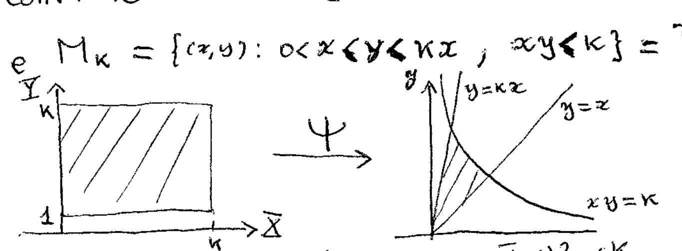


b. g_n è continua, limitata, non negativa. Si tratta di studiare la finitezza dei limiti delle successioni crescenti

$a_k = \int_{A\cap M_k} g_n\,dxdy$, $b_k = \int_{B\cap M_k} g_n\,dxdy$, con $M_k \subset M_{k+1}$, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k = \mathring{A}$ M_k P-J misurabili

Conviene considerare le variabili $X = xy$, $Y = \frac{y}{x}$, $\Psi(X,Y) = \begin{cases} x = \sqrt{\frac{X}{Y}} \\ y = \sqrt{XY} \end{cases}$

e $M_k = \{(x,y) : 0 < x < y < kx,\ xy < k\} = \Psi(\{(X,Y) : 0 < X < k,\ 1 < Y < k\})$



$|\det d\Psi| = \frac{1}{2Y}$

$\int_{A\cap M_k} g_n(x,y)\,dxdy = \int_0^k dX\ n e^{-(nX-1)^2} \cdot \int_1^k \frac{1}{2Y}dY \ge \int_0^1 n e^{-(nX-1)^2}dX \cdot \log\sqrt{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$

$\int_{B\cap M_k} g_n(x,y)\,dxdy = \int_0^k dX\, n e^{-(nX-1)^2} \cdot \int_1^2 \frac{1}{2Y}dy \le \int_0^{+\infty} e^{-(\tau-1)^2}d\tau \cdot \log\sqrt{2} < +\infty$

c. $\int_B g_n(x,y)\,dxdy = \log\sqrt{2}\int_0 n e^{-(nX-1)^2}dX = \log\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-(\tau-1)^2}d\tau$ = costante in n.

Calcolo Differenziale ed Integrazione: compito del 7-06-2002.

NOME COGNOME

Matricola n.

ESERCIZIO n. 3

a- Si calcolino le soluzioni del sistema: $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + z(t) \\ z'(t) = y(t) + z(t) \end{cases}$

b- Si descrivano le traiettorie che giacciono su piani di $\mathbf{R}^3$ determinando quali sono questi piani.

c- Si studi l'esistenza e l'unicità della soluzione per: $\begin{cases} (x+y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + 2x\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 \ , \quad \mathbf{R}^2 \\ \\ u(x,0) = x \end{cases}$

---

a. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\det(A - \lambda \mathrm{Id}) = -(1-\lambda)(1+\lambda)(2-\lambda)$

$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \lambda = 1, -1, 2$

$a + b = a \ , \ -a \ , \ 2a$
$a + c = b \ , \ -b \ , \ 2b$
$b + c = c \ , \ -c \ , \ 2c$

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}, \ V_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}, \ V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}$. Quindi

$$V(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} + \gamma e^{2t} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} e^t + \tilde{\beta} e^{-t} + \tilde{\gamma} e^{2t} \\ -2\tilde{\beta} e^{-t} + \tilde{\gamma} e^{2t} \\ -\tilde{\alpha} e^t + \tilde{\beta} e^{-t} + \tilde{\gamma} e^{2t} \end{pmatrix}$$

b. Se una soluzione ha traiettoria che giace in un piano dovranno esistere $W \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$, $c \in \mathbb{R}$: $\forall t \ (V(t) \cdot W) = c$ cioè

$\forall t \quad e^t \alpha(V_1 \cdot W) + e^{-t} \beta(V_{-1} \cdot W) + e^{2t} \gamma(V_2 \cdot W) - c = 0$.

essendo le quattro funzioni $e^t, e^{-t}, e^{2t}, 1$ <u>linearmente</u> <u>indipendenti</u> si ha:

$\alpha(V_1 \cdot W) = \beta(V_{-1} \cdot W) = \gamma(V_2 \cdot W) = c = 0$

essendo $W \neq 0$ e $\{V_1, V_{-1}, V_2\}$ una base (ortogonale) di $\mathbb{R}^3$ si avremo i seguenti casi "singolari":

$V(t) \equiv 0 \ \forall t$;	$V(t) = \alpha e^t V_1$;	$V(t) = \beta e^{-t} V_{-1}$;	$V(t) = \gamma e^{2t} V_2$;
$(\alpha = \beta = \gamma = 0)$	$(\beta = \gamma = 0)$	$(\alpha = \gamma = 0)$	$(\beta = \alpha = 0)$
TUTTI PIANI PER L'ORIGINE	PIANI PER τV_1	PIANI PER τV_{-1}	PIANI per τV_2

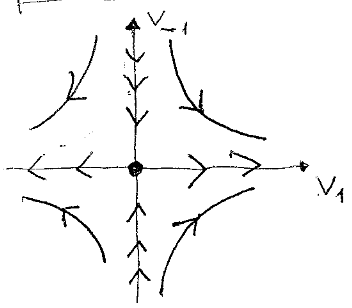
e inoltre:

$V(t) = \alpha e^{t} V_1 + \beta e^{-t} V_{-1}$;

$(\gamma = 0)$ $\alpha\beta \neq 0$

spazio generato da V_1, V_{-1}
ortogonale a V_2

$\boxed{x + y + z = 0}$



$$(V(t)\cdot V_1) = \frac{\alpha\beta |V_1|^2 |V_{-1}|^2}{(V(t)\cdot V_{-1})}$$

nelle coordinate date da V_1, V_{-1}

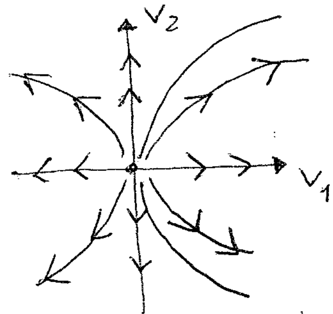
$X(t)\,Y(t) = \alpha\beta$

$V(t) = \alpha e^{t} V_1 + \gamma e^{2t} V_2$;

$(\beta = 0)$ $\alpha\gamma \neq 0$

s.g. da V_1, V_2
ortogonale a V_{-1}

$\boxed{x - 2y + z = 0}$



nelle coordinate V_1, V_2

$$(V(t)\cdot V_1)^2 = \frac{\alpha^2}{\gamma}(V(t)\cdot V_2)$$

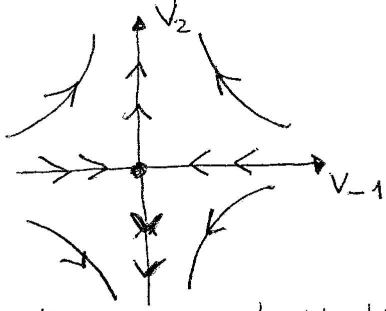
$$X(t)^2 = \frac{\alpha^2}{\gamma}\,Y(t)$$

$V(t) = \beta e^{-t} V_{-1} + \gamma e^{2t} V_2$

$(\alpha = 0)$ $\beta\gamma \neq 0$

s.s. da V_{-1} V_2
ortogonale a V_1

$\boxed{x - z = 0}$



nelle coordinate V_{-1} V_2

$$(V(t)V_{-1})^2 = \frac{\beta^2\cdot\gamma}{(V(t)V_2)}$$

$$X(t)^2\cdot Y(t) = \beta^2\gamma$$

c. Un'eventuale soluzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che sia differenziabile, per la regola di derivazione delle funzioni composte dovrebbe essere costante sulle traiettorie del sistema $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = 2x(t) \end{cases}$ (il precedente proiettato sul piano invariante $x = z$)

che ha soluzioni $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \tilde{\beta} e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \tilde{\gamma} e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta} e^{-t} + \tilde{\gamma} e^{2t} \\ -2\tilde{\beta} e^{-t} + \tilde{\gamma} e^{2t} \end{pmatrix}$. In particolare

$u(e^{2t}, e^{2t})$ e $u(e^{-t}, -2e^{-t})$ dovrebbero essere costanti.

Poiché $\lim_{t\to-\infty} e^{+2t} = 0$, $\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$, e dovendo essere u continua, $u(0,0) = 0$

si avrebbe $u(x, x) = 0 = u(x, -2x)$.

Ma allora u non sarebbe differenziabile in $(0,0)$, poiché ha due derivate direzionali nulle, e una non nulla $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial x}{\partial x} = 1$.

Il problema non ha soluzioni differenziabili in un intorno di $(0,0)$.