Calcolo delle Variazioni A - Domande per l'esame

1. Teorema di Rellich

Domanda 1.1. *Dimostrare la proposizione seguente*

Lemma. *Siano $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e $y \in \mathbb{R}^d$. Allora*

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^2_x} \le |y|\,\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Domanda 1.2. *Usando la proposizione precedente, mostrare la stima seguente.*

Lemma. *Sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ una funzione tale che:*

$$\varphi \ge 0 \text{ su } \mathbb{R}^d; \qquad \text{il supporto di } \varphi \text{ è contenuto in } B_1; \qquad \int_{B_1} \varphi(x)\,dx = 1.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo la funzione

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\phi(x/\varepsilon).$$

Allora, per ogni $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$, abbiamo la stima

$$\|u * \phi_\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Domanda 1.3. *Usando i risultati precedenti, dimostrare il seguente teorema.*

Teorema (Teorema di Rellich in domini limitati). *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$. Se u_n è una sottosuccessione limitata di $H^1_0(\Omega)$, allora esistono una funzione $u \in H^1_0(\Omega)$ ed una sottosuccessione di u_n (che indichiamo ancora con (u_n)) tali che:*

- *u_n converge a u debole H^1;*
- *u_n converge a u forte L^2;*
- *$u_n(x)$ converge a $u(x)$ per quasi-ogni $x \in \mathbb{R}^d$.*

Domanda 1.4. *Usando il teorema precedente e la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, mostrare il seguente risultato più generale.*

Teorema (Teorema di Rellich per domini di misura finita). *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$. Se u_n è una successione limitata di $H^1_0(\Omega)$, allora esistono una funzione $u \in H^1_0(\Omega)$ ed una sottosuccessione di u_n (che indichiamo ancora con (u_n)) tali che:*

- *u_n converge a u debole H^1;*
- *u_n converge a u forte L^2;*
- *$u_n(x)$ converge a $u(x)$ per quasi-ogni $x \in \mathbb{R}^d$.*

Domande ed esercizi collegati

Esercizio. *Data una funzione di Sobolev $F \in H^1(\mathbb{R}^d)$, consideriamo l'insieme*

$$\mathcal{K} = \Big\{ u \in H^1(\mathbb{R}^d) \ : \ |u| \le F \Big\}.$$

Se u_n è una successione in $\mathcal{K}$, limitata di $H^1(\mathbb{R}^d)$, allora esistono una funzione $u \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{K}$ ed una sottosuccessione di u_n (che indichiamo ancora con (u_n)) tali che:

- *u_n converge a u debole H^1;*
- *u_n converge a u forte L^2;*
- *$u_n(x)$ converge a $u(x)$ per quasi-ogni $x \in \mathbb{R}^d$.*

---

2. Traslazioni e funzioni di Sobolev

Domanda 2.1. *Dimostrare la proposizione seguente*

Teorema. *Siano $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e $y \in \mathbb{R}^d$. Allora*
$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^2_x} \le |y| \, \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Domanda 2.2. *Mostrare che vale anche l'implicazione opposta.*

Teorema. *Siano $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e $y \in \mathbb{R}^d$. Allora*
$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^2_x} \le |y| \, \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Usare il fatto che
$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^2_x} = \sup \Big\{ \int_{\mathbb{R}^d} \big(u(x+y) - u(x)\big)\psi(x)\, dx \ : \ \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \ \|\psi\|_{L^2} = 1 \Big\}.$$

Domande ed esercizi collegati

Teorema (Poincaré)**.** *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$. Allora,*
$$\int_\Omega u^2 \, dx \le 4 \operatorname{diam}(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx,$$
per ogni $u \in H^1_0(\Omega)$.

Proposizione. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $u \in H^1_0(\Omega)$. Se $\nabla u \equiv 0$ in Ω, allora $u \equiv 0$ in Ω.*

---

3. Inf e sup

Domanda 3.1. *Mostrare il lemma seguente.*

Lemma (Composizione con funzioni C^1)**.** *Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e tale che*

$$F(0) = 0 \qquad e \qquad L := \|F'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty.$$

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $u \in H^1(\Omega)$. Allora anche la funzione

$$F(u) : \Omega \to \mathbb{R}$$

è una funzione di Sobolev e

$$\partial_j(F(u)) = F'(u)\,\partial_j u.$$

Domanda 3.2. *Usando il lemma precedente, mostrare il teorema seguente.*

Teorema (La parte positiva di una funzione di Sobolev)**.** *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e sia $u \in H^1(\Omega)$. Allora la funzione*

$$u_+(x) = \max\{u(x), 0\}$$

è in $H^1(\Omega)$ e

$$\nabla u_+ = \mathbb{1}_{\{u>0\}} \nabla u.$$

Due corrolari da sapere

Teorema (Il gradiente di una funzione di Sobolev è locale)**.** *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(\Omega)$. Allora*

$$\nabla u = \mathbb{1}_{\{u>0\}} \nabla u + \mathbb{1}_{\{u<0\}} \nabla u.$$

In particolare,

$$\nabla u = 0 \quad \textit{Lebesgue quasi-ovunque su} \quad \{u = 0\}.$$

Di conseguenza, se u e v sono due funzioni in $H^1(\Omega)$, allora

$$\nabla u = \nabla v \quad \textit{Lebesgue quasi-ovunque su} \quad \{u = v\}.$$

Teorema (Modulo di una funzione di Sobolev)**.** *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(\Omega)$. Allora $|u| \in H^1(\Omega)$,*

$$\nabla |u| = \mathbb{1}_{\{u>0\}} \nabla u - \mathbb{1}_{\{u<0\}} \nabla u.$$

In particolare,

$$|\nabla |u|| = |\nabla u| \quad \textit{q.o. in} \quad \Omega.$$

Esercizi e domande

Esercizio. *Siano Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(\Omega)$. Mostrare che per ogni $t \in \mathbb{R}$ le funzioni*

$$u \wedge t(x) := \min\{u(x), t\} \qquad e \qquad (u-t)_+(x) := \max\{u(x) - t, 0\}$$

sono in $H^1(\Omega)$ e

$$\nabla(u \wedge t) = \mathbb{1}_{\{u>t\}} \nabla u \qquad e \qquad \nabla(u-t)_+ = \mathbb{1}_{\{u>t\}} \nabla u.$$

Esercizio. *Siano Ω un aperto (non necessariamente di misura finita) in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1_0(\Omega)$. Mostrare che per ogni $t \geq 0$ le funzioni*

$$u \wedge t(x) := \min\{u(x), t\} \qquad e \qquad (u-t)_+(x) := \max\{u(x) - t, 0\}$$

sono in $H^1_0(\Omega)$ e

$$\nabla(u \wedge t) = \mathbb{1}_{\{u>t\}} \nabla u \qquad e \qquad \nabla(u-t)_+ = \mathbb{1}_{\{u>t\}} \nabla u.$$

Proposizione (Sup, inf e lo spazio H^1_0)**.** *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1_0(\Omega)$. Allora, le funzioni*

$$u_+ \ , \quad u_- \quad e \quad |u| = u_+ + u_-$$

sono in $H^1_0(\Omega)$.

Proposizione. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1_0(\Omega)$. Allora, per ogni $t \geq 0$ le funzioni*

$$u \wedge t(x) := \min\{u(x), t\} \qquad e \qquad (u-t)_+(x) := \max\{u(x) - t, 0\}$$

sono in $H^1_0(\Omega)$.

---

4. Inf e sup - versione alternativa

Domanda 4.1. *Mostrare il lemma seguente.*

Lemma (Composizione con funzioni C^1)**.** *Sia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e tale che*

$$F(0)=0 \qquad e \qquad L:=\|F'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}<\infty.$$

Siano $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ un aperto e $u\in H^1_0(\Omega)$. Allora anche la funzione

$$F(u):\Omega\to\mathbb{R}$$

è in $H^1_0(\Omega)$ e

$$\partial_j(F(u))=F'(u)\,\partial_j u.$$

Domanda 4.2. *Usando il lemma precedente, mostrare il teorema seguente.*

Teorema (La parte positiva di una funzione di Sobolev)**.** *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e sia $u\in H^1_0(\Omega)$. Allora la funzione*

$$u_+(x)=\max\{u(x),0\}$$

è in $H^1_0(\Omega)$ e

$$\nabla u_+=\mathbb{1}_{\{u>0\}}\nabla u.$$

Due corrolari da sapere

Teorema (Il gradiente di una funzione di Sobolev è locale)**.** *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u\in H^1_0(\Omega)$. Allora*

$$\nabla u=\mathbb{1}_{\{u>0\}}\nabla u+\mathbb{1}_{\{u<0\}}\nabla u.$$

In particolare,

$$\nabla u=0 \quad \textit{Lebesgue quasi-ovunque su} \quad \{u=0\}.$$

Di conseguenza, se u e v sono due funzioni in $H^1_0(\Omega)$, allora

$$\nabla u=\nabla v \quad \textit{Lebesgue quasi-ovunque su} \quad \{u=v\}.$$

Teorema (Modulo di una funzione di Sobolev)**.** *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u\in H^1_0(\Omega)$. Allora $|u|\in H^1_0(\Omega)$,*

$$\nabla|u|=\mathbb{1}_{\{u>0\}}\nabla u-\mathbb{1}_{\{u<0\}}\nabla u.$$

In particolare,

$$|\nabla|u||=|\nabla u| \quad \textit{q.o. in} \quad \Omega.$$

Esercizi e domande

Esercizio. *Siano Ω un aperto (non necessariamente di misura finita) in $\mathbb{R}^d$ e $u\in H^1_0(\Omega)$. Mostrare che per ogni $t\geq 0$ le funzioni*

$$u\wedge t(x):=\min\{u(x),t\} \qquad e \qquad (u-t)_+(x):=\max\{u(x)-t,0\}$$

sono in $H^1_0(\Omega)$ e

$$\nabla(u\wedge t)=\mathbb{1}_{\{u>t\}}\nabla u \qquad e \qquad \nabla(u-t)_+=\mathbb{1}_{\{u>t\}}\nabla u.$$

---

5. Limitatezza delle soluzioni

Domanda 5.1. *Mostrare il teorema seguente.*

Teorema. *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^p(\Omega)$, dove $p > \frac{d}{2}$. Allora la soluzione debole $u \in H^1_0(\Omega)$ di*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega \ , \qquad u \in H^1_0(\Omega).$$

è limitata e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_{d,p} \|f\|_{L^p} |\Omega|^{\frac{2p-d}{pd}} .$$

Esercizi collegati

Esercizio. *Nell'ipotesi del teorema precedente, mostrare che per ogni $t > 0$*

$$\|(u-t)_+\|_{L^\infty} \le \frac{C_{d,p}}{\ell} \|f\|_{L^p} |\Omega_t|^{\frac{2p-d}{pd}} ,$$

dove

$$\Omega_t = \{u > t\}.$$

Esercizio. *Nell'ipotesi del teorema precedente, mostrare che se $p = \infty$, allora per ogni $t \ge 0$ si ha*

$$\|(u-t)_+\|_{L^\infty} \le C_d \|f\|_{L^\infty} |\Omega_t|^{\frac{2}{d}} .$$

Esercizio. *Siano Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^\infty(\Omega)$. Allora, la soluzione debole $u \in H^1_0(\Omega)$ di*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega \ , \qquad u \in H^1_0(\Omega),$$

è limitata e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_d \|f\|_{L^\infty}^{\frac{d}{d+2}} \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{2}{d+2}} .$$

Esercizio. *Siano Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^\infty(\Omega)$. Allora, la soluzione debole $u \in H^1_0(\Omega)$ di*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega \ , \qquad u \in H^1_0(\Omega),$$

è limitata e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_d \|f\|_{L^\infty}^{\frac{d}{d+4}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{d+2}} .$$

Domanda 5.2. *Usando l'esercizio precedente, dimostrare il teorema seguente.*

Teorema. *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $u \in H^1_0(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\Delta u = \lambda u \quad in \quad \Omega \ , \qquad u \in H^1_0(\Omega) \ , \qquad \int_\Omega u^2 \, dx = 1.$$

Allora, $u \in L^\infty$ e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_d \lambda^{d/4},$$

dove C_d è una costante dimensionale.

6. Teorema della traccia in B_R

Domanda 6.1. *Dimostrare il lemma seguente.*

Lemma. *Sia $\varphi \in C(\overline{B}_1) \cap C^1(B_1)$ una funzione definita su $\overline{B}_1$ in $\mathbb{R}^d$. Allora,*

$$\int_{\partial B_1} \varphi \, d\mathcal{H}^{d-1} \le d \left(\int_{B_1} \varphi \, dx + \int_{B_1} |\nabla \varphi| \, dx \right).$$

Domanda 6.2. *Dimostrare il teorema seguente.*

Teorema. *Sia B_r la palla di raggio r in $\mathbb{R}^d$. Esiste una mappa lineare continua*

$$T : H^1(B_r) \to L^2(\partial B_r)$$

tale che per ogni $\phi \in C^\infty(\overline{B}_r)$, $T\phi = \phi$ e per ogni $u \in H^1(B_r)$ si ha la disuguaglianza

$$\int_{\partial B_r} |Tu|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1} \le \frac{2d}{r} \int_{B_r} u^2 \, dx + rd \int_{B_r} |\nabla u|^2 \, dx \, .$$

Domande collegate

Esercizio. *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Mostrare che la funzione*

$$M(r) = \frac{1}{r^{d-1}} \int_{\partial B_r} u$$

è $1/2$-Hölder continua su ogni intervallo $[T, +\infty)$, $T > 0$.

Domanda 6.3. *Usando l'esercizio precedente mostrare il risultato seguente.*

Esercizio. *Siano B_r la palla di raggio $r > 0$ in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_r)$. Allora, sono equivalenti:*

(i) *$u \in H^1_0(B_r)$;*
(ii) *la traccia di u su ∂B_r è nulla.*

7. La stima L^2-L^∞ di De Giorgi

Domanda 7.1. *Dimostrare il lemma seguente in dimensione $d \geq 3$.*

Lemma. *Sia $u \in H^1(B_\rho)$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0 \quad in \quad B_\rho\ ,$$

dove la matrice A è tale che:

$$0 < c_A\,\mathrm{Id} \leq A(x) \leq C_A\,\mathrm{Id} \quad per\ ogni \quad x \in B_\rho\,.$$

Allora,

$$\|u_+\|^2_{L^\infty(B_{\rho/2})} \leq C \fint_{B_\rho} u_+^2\,dx,$$

dove la costante C dipende dalla dimensione e dal rapporto $\kappa_A = \frac{C_A}{c_A}$.

8. Sul teorema di De Giorgi

Domanda 8.1. *Dimostrare il lemma seguente.*

Lemma. *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in C^1(B_R)$. Siano $t < T$ due numeri reali. Allora,*

$$|\{u \le t\} \cap B_R| \, |\{u \ge T\} \cap B_R|^{1-\frac{1}{d}} \le \frac{C_d}{T-t} |B_R| \int_{B_R} |\nabla u| \, dx,$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Domanda 8.2. *Usando il lemma precedente mostrare la stima seguente.*

Lemma. *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$, $u \in H^1(B_R)$ e $t > T$ due numeri reali. Allora*

$$|\{u \le t\} \cap B_R| \, |\{u \ge T\} \cap B_R|^{1-1/d} \le C_d |B_R| \, |\{t < u < T\} \cap B_R|^{1/2} \left(\int_{B_R} |\nabla (u-t)_+|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

In particolare, se

$$\frac{|\{u \le t\} \cap B_R|}{|B_R|} \ge \frac{1}{2},$$

allora

$$|\{u \ge T\} \cap B_R|^{1-1/d} \le C_d \, |\{t < u < T\} \cap B_R|^{1/2} \, \frac{1}{T-t} \left(\int_{B_R} |\nabla (u-t)_+|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Domanda 8.3. *Usando la stima precedente e la stima L^2-L^∞, dimostrare il teorema seguente.*

Teorema. *Sia $u \in H^1(B_{2R})$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0 \quad in \quad B_{2R} \, ,$$

dove la matrice A è tale che:

$$c_A \, \mathrm{Id} \le A(x) \le C_A \, \mathrm{Id} \quad per\ ogni \quad x \in B_{2R} \, .$$

Esiste una costante $\eta \in (0,1)$ tale che, se

$$\operatorname*{osc}_{B_{2R}} u \le 2,$$

allora

$$\operatorname*{osc}_{B_{R/2}} u \le 2 - \eta.$$

9. Disuguaglianza di Harnack, oscillazione e continuità

Disuguaglianza di Harnack per le funzioni armoniche e le sue conseguenze.

Lemma (Disuguaglianza di Harnack)**.** *Esiste una costante dimensionale $C_{\mathcal{H}}$ tale che*

$$\max_{B_r(x_0)} h \le C_{\mathcal{H}} \min_{B_r(x_0)} h\,.$$

per ogni funzione $h : B_{2r}(x_0) \to \mathbb{R}$ non-negativa e armonica in $B_{2r}(x_0) \subset \mathbb{R}^d$. In particolare,

$$h(x_0) \le C_{\mathcal{H}} \min_{B_r(x_0)} h\,.$$

Lemma (Controllo dell'oscillazione)**.** *Esiste una costante dimensionale $c \in (0,1)$ tale che*

$$\operatorname*{osc}_{B_r(x_0)} h \le (1-c) \operatorname*{osc}_{B_{2r}(x_0)} h\,,$$

per ogni funzione $h : B_{2r}(x_0) \to \mathbb{R}$ armonica in $B_{2r}(x_0) \subset \mathbb{R}^d$.

Un risultato generale sull'oscillazione e continuità.

Lemma (Oscillazione e continuità)**.** *Sia $u : B_R \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:*

(a) $\|u\|_{L^\infty(B_R)} \le M$;

(b) *esiste una costante $c \in (0,1)$ tale che per ogni $x \in B_{R/2}$ ed ogni raggio $r \le \dfrac{R}{4}$ si ha*

$$\operatorname*{osc}_{B_r(x)} u \le (1-c) \operatorname*{osc}_{B_{2r}(x)} h\,.$$

Allora, esiste una costante $\alpha \in (0,1)$, che dipende solo da c, tale che

$$|u(x) - u(y)| \le \frac{M}{R^\alpha} C |x-y|^\alpha \qquad \textit{per ogni} \qquad x, y \in B_{R/4},$$

dove C è una costante numerica.

10. Disuguaglianza di Poincaré

Teorema. *Siano* $B_R \subset \mathbb{R}^d$ *e* $u \in H^1(B_R)$. *Allora,*

$$\frac{1}{R^2}\int_{B_R} \big|u(x) - M_R\big|^2\,dx \le C_d \int_{B_R} |\nabla u|^2\,dx \qquad \textit{dove} \qquad M_R := \fint_{B_R} u(x)\,dx\ ,$$

e dove C_d *è una costante dimensionale.*

11. Capacità I

Domanda 11.1. *Dare la definizione di* $\operatorname{cap}(A; B_{2R})$ *e dimostrare le proposizioni seguenti.*

Proposizione. *Per ogni coppia di insiemi* $U, V \subset B_R$ *si ha*

$$\operatorname{cap}(U \cup V; B_{2R}) + \operatorname{cap}(U \cap V; B_{2R}) \le \operatorname{cap}(U; B_{2R}) + \operatorname{cap}(V; B_{2R}).$$

Proposizione. *Siano* B_{2R} *una palla in* $\mathbb{R}^d$ *e* $(A_k)_{k\ge 1}$ *una successione crescente di insiemi tale che*

$$A_k \uparrow A_\infty.$$

Allora,

$$\operatorname{cap}(A_k, B_{2R}) \uparrow \operatorname{cap}(A_\infty, B_{2R}).$$

Esercizi sugli insiemi di capacità nulla

Definizione. Sia A un insieme di $\mathbb{R}^d$. Diremo che A ha capacità nulla se

$$\operatorname{cap}\big(A; B_{2R}(x_0)\big) = 0 \qquad \text{per ogni palla} \qquad B_{2R}(x_0) \subset \mathbb{R}^d.$$

Esercizio. *Se* $A \subset \mathbb{R}^d$ *e* $B \subset \mathbb{R}^d$ *hanno capacità nulla, allora anche* $A \cup B$ *ha capacità nulla.*

Esercizio. *Se* $A_k \subset \mathbb{R}^d$, $k \ge 1$, *è una successione di insiemi di capacità nulla, allora anche* $A_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ *ha capacità nulla.*

Esercizio. *Si dimostri che se un insieme* $A \subset \mathbb{R}^d$ *può essere ricoperto da una quantita numerabile di palle*

$$B_{R_k}(x_k), \quad k \ge 1,$$

tali che

$$\operatorname{cap}\big(A; B_{2R_k}(x_k)\big) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad k \ge 1,$$

allora A *ha capacità nulla.*

12. Definizione puntuale delle funzioni di Sobolev

Domanda 12.1. *Mostrare che vale la seguente stima capacitaria.*

Lemma. *Sia $u \in H^1_0(B_{2R})$ una funzione data e sia*

$$A = \Big\{ x \in \mathbb{R}^d \ : \ \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u \geq \varepsilon \quad \textit{per un qualche} \quad r \in (0, {}^{R}\!/{}_{2}) \Big\}.$$

Allora

$$\operatorname{cap}\big(A; B_{2R}\big) \leq \frac{C_d}{\varepsilon^2} \int_{B_{2R}} |\nabla u|^2 \, dx,$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Domanda 12.2. *Usando la stima capacitaria, mostrare il lemma seguente.*

Lemma. *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Allora, l'insieme*

$$A = \Big\{ x_0 \in \mathbb{R}^d \ : \ \limsup_{r \to 0} \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx > 0 \Big\}$$

ha capacità nulla.

Domanda 12.3. *Usando il lemma precedente si imostri il teorema seguente.*

Teorema. *Per ogni $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ esiste un insieme $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^d$, di capacità nulla, tale che il limite*

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B_r(x_0)} u(x) \, dx$$

esiste per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{N}$.

13. Convergenza cap-quasi-ovunque

Teorema. *Sia u_n una successione in $H^1(\mathbb{R}^d)$ che converge forte-H^1 ad una funzione $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Allora, esiste una sottosuccessione u_{n_k} che converge a u* cap-*quasi-ovunque.*

14. Quasi continuità

Teorema. *Consideriamo una funzione di* $H^1(\mathbb{R}^d)$ *e una sua rappresentante* $u:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ *tale che*

$$u(x_0)=\lim_{r\to 0}\fint_{B_r(x_0)} u(x)\,dx \quad \text{per cap-quasi-ogni} \quad x_0\in\mathbb{R}^d.$$

Allora, per ogni $\varepsilon>0$ *esiste un insieme* Ω_ε *tale che*

$$u:\mathbb{R}^d\setminus\Omega_\varepsilon\to\mathbb{R} \quad \text{è una funzione continua} \qquad e \qquad \mathrm{cap}\big(\Omega_\varepsilon;B_{2R}(x_0)\big)<\varepsilon,$$

per ogni $x_0\in\mathbb{R}^d$ *ed ogni* $R\geq 1$.

15. Capacità e gli spazi H^1_0

Teorema. *Siano $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Allora, sono equivalenti:*

(i) $u \in H^1_0(\Omega)$;

(ii) $u = 0$ cap-*quasi-ovunque in* $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$.

16. Teorema di Gagliardo

Domanda 16.1. *Dimostrare il seguente teorema della traccia.*

Teorema (Teorema della traccia)**.** *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d_+)$. Allora, $u \in L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ e*

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} u^2(x',0)\,dx' \leq \int_{\mathbb{R}^d_+} u^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^d_+} |\nabla u|^2\,dx.$$

Domanda 16.2. *Dimostrare la seguente disuguaglianza integrale di Minkowski.*

Teorema. *Siano $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi di misura finita e*

$$F : X \times Y \to \mathbb{R}$$

una funzione, misurabile, limitata e positiva. Sia $p > 1$. Allora

$$\left(\int_X \left(\int_Y F(x,y)\,dy\right)^p dx\right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X F(x,y)^p\,dx\right)^{1/p} dy\,.$$

Domanda 16.3. *Dimostrare la seguente disuguaglianza di Hardy integrale.*

Teorema. *Sia $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una funzione misurabile, positiva ed a supporto compatto in $[0,+\infty)$. Sia $p > 1$. Allora,*

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{+\infty} f(x)^p\,dx.$$

Domanda 16.4. *Usando la disuguaglianza di Hardy integrale, dimostrare il teorema seguente.*

Teorema. *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d_+)$. Definiamo la funzione $v \in L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ come*

$$v(x') = u(x', x_d).$$

Allora,

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{|v(x') - v(y')|^2}{|x'-y'|^d}\,dx'dy' \leq C_d \int_{\mathbb{R}^d_+} |\nabla u|^2\,dx,$$

dove C_d è una costante dimensionale.

17. Funzioni Lipschitziane e funzioni di Sobolev

Proposizione (Lipschitz $\Rightarrow$ Sobolev)**.** *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u : B_R \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz $L > 0$,*
$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y| \qquad \textit{per ogni} \qquad x, y \in B_R.$$
Allora, $u \in H^1(B_R)$, $|\nabla u| \in L^\infty(B_R)$ e $\|\nabla u\|_{L^\infty(B_R)} \leq L$.

Proposizione. *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R)$. Se $|\nabla u| \in L^\infty(B_R)$, allora u è Lipschitziana e*
$$|u(x) - u(y)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(B_R)}|x - y| \qquad \textit{per ogni} \qquad x, y \in B_R.$$

18. Continuità Lipschitz delle soluzioni

Domanda 18.1. *Dimostrare il lemma seguente.*

Lemma. *Siano $B_\rho(x_0) \in \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_\rho(x_0))$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \text{in} \quad B_\rho(x_0).$$

Supponiamo che:

- *esistono costanti $C_A > 0$ e $\alpha > 0$ tali che*

$$\big(1 - C_A|x - x_0|^\alpha\big)\,\mathrm{Id} \le A_x \le \big(1 + C_A|x - x_0|^\alpha\big)\,\mathrm{Id} \qquad \text{per ogni} \qquad x \in B_\rho(x_0).$$

$$\boxed{\boxed{\text{In particolare, } A_{x_0} = \mathrm{Id}.}}$$

- *$f \in L^p(B_\rho(x_0))$ per un qualche $p > d$.*
- *esistono costanti $C_F > 0$ e β tali che*

$$\sup_{B_R(x_0)} |F(x) - F(x_0)| \le C_F R^\beta \quad \text{per ogni} \quad R \le \rho.$$

Allora,

$$\fint_{B_R} |\nabla(u - h)|^2\, dx \le 4C_A R^\alpha \fint_{B_R} |\nabla u|^2\, dx + 4\Big(C_d \|f\|_{L^p(B_\rho(x_0))} R^{1-d/p} + C_F R^\beta\Big),$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Domanda 18.2. *Usando il lemma precedente, dimostrare il teorema seguente.*

Teorema. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \text{in} \quad \Omega\ ,$$

dove:

- *A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, con coefficienti Hölder.*
- *$f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.*
- *$F \in C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\alpha > 0$.*

Allora, $u \in C^{0,1}(\Omega)$.

19. Funzioni di Sobolev sulla sfera

Proposizione. *Per ogni $\phi \in H^1(\partial B_1)$ ed $\alpha \geq 0$, definiamo la funzione*
$$u(r,\theta) = r^\alpha \phi(\theta).$$
Se
$$d > 2 \quad e \quad \alpha \geq 0 \qquad oppure \qquad d \geq 2 \quad e \quad \alpha > 0,$$
allora si ha che $u \in H^1(B_1)$ e
$$\int_{B_1} |\nabla u|^2\,dx = \int_0^1 r^{d-3+2\alpha} \int_{\partial B_1} \Big(\alpha^2\phi^2(\theta) + |\nabla_\theta \phi|^2\Big)\,d\theta\,dr\,.$$

Proposizione. *Sia $u \in H^1(B_1)$. Allora, per Lebesgue quasi-ogni $r \in (0,1)$ la funzione*
$$\phi_r(\theta) := u(r\theta)$$
è in $H^1(\partial B_1)$.

Proposizione. *Date una funzione $\phi \in H^1(\partial B_1)$ ed un $\alpha > 0$, sono equivalenti:*

(i) *la funzione $u(r,\theta) = r^\alpha\phi(\theta)$ è armonica in $\mathbb{R}^d$;*

(ii) *la funzione ϕ è soluzione di*
$$-\Delta_{\partial B_1}\phi = \lambda\phi \quad su \quad \partial B_1,$$
dove
$$\lambda = \alpha(\alpha + d - 2).$$

Lemma. *Sia $\phi \in H^1(\partial B_1)$ una funzione tale che*
$$\phi(\theta) = \sum_{k=0}^N c_k\phi_k(\theta),$$
Allora, la funzione armonica, soluzione di
$$\Delta h = 0 \quad in \quad B_1, \qquad h = \phi \quad su \quad \partial B_1$$
è data da
$$h = \sum_{k=0}^N c_k h_k,$$
dove la convergenza della serie è forte in $H^1(B_1)$. Inoltre,
$$\int_{B_1} |\nabla h|^2\,dx = \sum_{n=1}^N c_k^2\alpha_k.$$

Teorema. *Sia $\phi \in L^2(\partial B_1)$ e sia*
$$\phi(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\phi_n(\theta),$$
il suo sviluppo in armoniche sferiche in $L^2(\partial B_1)$. Allora, sono equivalenti:

(i) *ϕ è la traccia di una funzione $u \in H^1(B_1)$;*

(ii) *ϕ è la traccia di una funzione $h \in H^1(B_1)$ armonica in B_1;*

(iii) *la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2\alpha_n$ converge.*

Inoltre, la funzione armonica h è data da
$$h = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n h_n,$$
dove la convergenza della serie è forte in $H^1(B_1)$ ed il suo integrale di Dirichlet è
$$\int_{B_1} |\nabla h|^2\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2\alpha_n.$$

20. Formula di monotonia di Weiss

Per ogni $R > 0$ e $u \in H^1(B_R)$, definiamo

$$W(u,R) = \frac{1}{R^d}\int_{B_R} |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{R^{d+1}}\int_{\partial B_R} u^2.$$

Per $r > 0$ definiamo inoltre

$$u_r(x) := \frac{u(rx)}{r} \qquad \text{e} \qquad z_r(x) := |x| u_r\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Esercizio. *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Mostrare che per ogni $r > 0$ e $s > 0$,*

$$W(u_{rs}, 1) = W(u_r, s).$$

Lemma (Formula di Weiss)**.** *Mostrare che se $u \in C^\infty(B_R)$, allora*

$$\frac{\partial}{\partial r} W(u_r, 1) = \frac{d}{r}\big(W(z_r, 1) - W(u_r, 1)\big) + \frac{1}{r}\int_{\partial B_1} |x \cdot \nabla u_r - u_r|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Teorema (Formula di Weiss)**.** *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Allora, la funzione*

$$r \mapsto W(u_r, 1)$$

è assolutamente continua su ogni intervallo $[s, S] \subset (0, +\infty)$ e si ha

$$W(u_S, 1) - W(u_s, 1) = \int_s^S \left(\frac{d}{r}\big(W(z_r, 1) - W(u_r, 1)\big) + \frac{1}{r}\int_{\partial B_1} |x \cdot \nabla u_r - u_r|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}\right) dr.$$

Formula di Weiss per il problema a una fase

Per ogni $R > 0$ e $u \in H^1(B_R)$, definiamo

$$W(u,R) = \frac{1}{R^d}\int_{B_R} |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{R^{d+1}}\int_{\partial B_R} u^2 + \frac{1}{R^d}|\{u > 0\} \cap B_R|.$$

Per $r > 0$ definiamo inoltre

$$u_r(x) := \frac{u(rx)}{r} \qquad \text{e} \qquad z_r(x) := |x| u_r\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Esercizio. *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Mostrare che anche in questo caso, per ogni $r > 0$ e $s > 0$,*

$$W(u_{rs}, 1) = W(u_r, s).$$

Esercizio (Formula di Weiss)**.** *Siano B_R e $u \in H^1(B_R)$. Mostrare che*

$$\frac{\partial}{\partial r} W(u_r, 1) = \frac{d}{r}\big(W(z_r, 1) - W(u_r, 1)\big) + \frac{1}{r}\int_{\partial B_1} |x \cdot \nabla u_r - u_r|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Esercizio (Homogeneità dei blow-up)**.** *Siano D un aperto in $\mathbb{R}^d$ ed $u : D \to \mathbb{R}$ una funzione tale che*

$$u \in H^1(D) \qquad e \qquad u \geq 0 \quad in \quad D.$$

Supponiamo che u sia un minimo locale di

$$\mathcal{F}(u) = \int_D |\nabla u|^2\,dx + |\{u > 0\} \cap D|$$

in D e che $0 \in D$ un punto sul bordo di $\{u > 0\}$.

(a) Allora, la funzione

$$r \mapsto W(u, r)$$

è monotona crescente. In particolare, esiste il limite $\lim_{r\to 0} W(u, r)$.

(b) Supponiamo che $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sia un blow-up di u in 0, ovvero $b \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ ed esiste una successione $r_n \to 0$ tale che:

- *$u_{r_n} \to u_0$ forte $H^1(B_R)$ per ogni $B_R \subset \mathbb{R}^d$;*
- *$\mathbb{1}_{\{u_{r_n} > 0\}} \to \mathbb{1}_{\{u_0 > 0\}}$ quasi-ovunque in ogni $B_R \subset \mathbb{R}^d$;*
- *u_0 è un minimo locale di $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}^d$.*

Mostrare che u_0 è una funzione 1-omogenea.

21. Disuguaglianza epiperimetrica

Teorema (Disuguaglianza epiperimetrica)**.** *Esiste una costante dimensionale $\varepsilon \in (0,1)$ tale che per ogni funzione* 1*-omogenea $z : B_1 \to \mathbb{R}$, $z \in H^1(B_1)$, esiste una funzione $h : B_1 \to \mathbb{R}$ tale che*

$$h = z \quad su \quad \partial B_1 \qquad e \qquad W(h) \leq (1-\varepsilon)W(z).$$

22. Teorema di Schauder

Domanda 22.1. *Dimostrare il teorema seguente assumendo che u è Lipschitz e che la matrice A è della forma $A(x) = a(x)Id$, dove $a : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione $C^{0,\alpha}$.*

Teorema. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \textit{in} \quad \Omega,$$

dove:

- *A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, con coefficienti Hölder.*
- *$f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.*
- *$F \in C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\alpha > 0$.*

Allora, esiste $\alpha > 0$ tale che $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$.

23. Stima del gradiente

Lemma. *Sia $u \in H^1_{loc}(B_R)$ una funzione armonica su $B_R \subset \mathbb{R}^d$. Allora*

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{R/2})} \leq \frac{2d}{R}\|u\|_{L^\infty(B_R)}.$$

Teorema di Liouville

Teorema (Teorema di Liouville)**.** *Se $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è una funzione armonica e limitata, allora u è una costante.*

Esercizio. *Se $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è una funzione armonica e Lipschitziana in $\mathbb{R}^d$, allora u è della forma*

$$u(x) = a \cdot x + b$$

dove $a \in \mathbb{R}^d$ e $b \in \mathbb{R}$.

Esercizi

Esercizio. *Sia $h : B_R \to \mathbb{R}$ una funzione armonica in $B_R \subset \mathbb{R}^d$. Mostrare che*

$$\|\partial_{ij} h\|_{L^\infty(B_{R/2})} \leq \frac{16d^2}{R^2}\|h\|_{L^\infty(B_R)} \qquad \textit{per ogni} \qquad i, j \in \{1, \dots, d\}.$$

Esercizio. *Se $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è una funzione armonica tale che*

$$|u(X)| \leq a|X| + b \qquad \textit{per ogni} \qquad X \in \mathbb{R}^d,$$

allora u è un polinomio di grado 1.

24. Funzioni armoniche in senso di viscosità

Domanda 24.1. *Mostrare il teorema seguente.*

Teorema. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, sono equivalenti:*
(i) $u \in C^\infty(\Omega)$ *e* $\Delta u = 0$ *su* Ω*;*
(ii) $\Delta u = 0$ *in senso di viscosità in* Ω*.*

Domanda 24.2. *Usando il teorema precedente dimostrare il risultato seguente.*

Esercizio. *Sia $u : B_r \cap \{x_d \geq 0\}$ una funzione continua, armonica in $B_r \cap \{x_d > 0\}$ e che soddisfa*

$$\frac{\partial u}{\partial x_d} = 0 \quad su \quad B_r \cap \{x_d = 0\}$$

in senso di viscosità. Allora, $u \in C^\infty(B_r \cap \{x_d \geq 0\})$ e l'uguaglianza

$$\frac{\partial u}{\partial x_d} = 0 \quad su \quad B_r \cap \{x_d = 0\}$$

vale in senso classico.

25. Il problema a una fase - esistenza e continuità

Per ogni $u \in H^1(B_1)$ definiamo

$$\mathcal{F}(u) = \int_{B_1} |\nabla u|^2 \, dx + |\{u > 0\} \cap B_1|.$$

Esercizio. *Mostrare che, data una funzione*

$$g \in H^1(B_1) \cap L^\infty(B_1) \ , \qquad g \geq 0 \quad \textit{in} \quad B_1,$$

esiste una soluzione del problema variazionale

$$\min \Big\{ \mathcal{F}(u) \ : \ u \in H^1(B_1), \ u - g \in H^1_0(\Omega) \Big\}.$$

Esercizio. *Mostrare che per ogni soluzione u*

$$0 \leq u \leq \|g\|_{L^\infty(B_1)} \quad \textit{in} \quad B_1.$$

Esercizio. *Mostrare che*

$$\Delta u \geq 0 \quad \textit{in} \quad B_1$$

in senso delle distribuzioni.

Esercizio. *Mostrare che esiste una costante dimensionale $C_d \geq 0$ tale che per ogni $B_{2R}(x_0) \subset B_1$*

$$\Delta u\big(B_R(x_0)\big) \leq C_d R^{d-1}.$$

Esercizio. *Mostrare che*

(a) *l'insieme $\{u > 0\}$ è aperto;*
(b) *per ogni compatto $K \subset \{u > 0\} \cap B_1$ si ha*

$$\inf_K u > 0\,;$$

(c) $\Delta u = 0$ *in* $\{u > 0\}$.

Esercizio. *Mostrare che la funzione u è localmente lipschitziana in B_1.*

26. Il problema a una fase - nondegenerazione e blow-up

Per ogni $u \in H^1(B_1)$ definiamo

$$\mathcal{F}(u) = \int_{B_1} |\nabla u|^2 \, dx + |\{u > 0\} \cap B_1|.$$

Supponiamo che $u : B_1 \to \mathbb{R}$ sia un minimo locale di $\mathcal{F}$ in B_1. In particolare, supponiamo di sapere che:

- $u \geq 0$ in B_1;
- u è limitata;
- $u : B_1 \to \mathbb{R}$ è localmente lipschitziana;
- $\{u > 0\}$ è aperto e $\Delta u = 0$ in $\{u > 0\}$.

Non-degenerazione

Esercizio. *Mostrare che esiste una costante dimensionale $\eta > 0$ tale che, se*

$$\|u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \leq \eta \, r \qquad \text{in} \qquad B_r(x_0) \subset B_1,$$

allora $u \equiv 0$ in $B_{r/2}(x_0)$.

Blow-up

In seguito fissiamo un punto $x_0 \in B_1 \cap \partial\{u > 0\}$.

Esercizio. *Mostrare che esistono una successione*

$$r_n \to 0$$

ed una funzione

$$b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

tali che la successione di funzioni

$$u_{r_n, x_0}(x) := \frac{u(x_0 + r_n x)}{r_n}$$

converge a b uniformemente in ogni palla $B_R \subset \mathbb{R}^d$. Mostrare che la funzione b non è identicamente nulla.

Esercizio. *Mostrare che, per ogni $R > 0$,*

(a) *u_{r_n, x_0} converge forte-$H^1(B_R)$ alla funzione b;*

(b) *$\mathbb{1}_{\{u_{r_n, x_0} > 0\}}$ converge a $\mathbb{1}_{\{b > 0\}}$ in $L^1(B_R)$.*

Esercizio. *Mostrare che b è un minimo locale di $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}^d$.*

27. Classificazione dei blow-up in dimensione due

Per ogni $u \in H^1(B_R)$ definiamo

$$\mathcal{F}(u, B_R) = \int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx + |\{u > 0\} \cap B_R|.$$

Esercizio. *Mostrare che se u è un minimo locale di $\mathcal{F}$ in B_R e se $\partial\{u > 0\}$ è regolare C^∞, allora $|\nabla u| = 1$ su $\partial\{u > 0\}$.*

Esercizio. *Supponiamo che $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione non-negativa e Lipschitziana su $\mathbb{R}^2$. Mostrare che se u è un minimo locale di $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}^2$ e se u è 1-omogenea, allora u è della forma*

$$u(x) = (\nu \cdot x)_+$$

per un qualche vettore $\nu \in \mathbb{R}^2$ di norma 1.