

FUNZIONI DERIVABILI E DERIVATE PARZIALI

Definizione 1. Sia Ω un insieme aperto di \mathbb{R}^d e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data.

- (i) Diciamo che la funzione f è **derivabile** nel punto $X = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega$, se per ogni $i = 1, \dots, d$ esistono le **derivate parziali**

$$\partial_{x_i} f(X) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_d) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_d)}{h}.$$

Per le derivate parziali di f sono comunemente usate le seguenti notazioni:

$$\partial_{x_i} f = \partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Il vettore con coordinate $\partial_i f(X)$, $i = 1, \dots, d$, è detto **gradiente** di f nel punto X

$$\nabla f(X) := (\partial_{x_1} f(X), \partial_{x_2} f(X), \dots, \partial_{x_i} f(X), \dots, \partial_{x_d} f(X)) \in \mathbb{R}^d.$$

- (ii) Diciamo che funzione f è derivabile in Ω , se lo è in ogni punto $X \in \Omega$.

Teorema 2 (Funzioni con gradiente nullo). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e connesso per archi. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione derivabile su Ω e tale che

$$\partial_{x_i} f(X) = 0 \quad \text{per ogni } X \in \Omega \quad \text{ed ogni } i = 1, \dots, d,$$

allora f è costante su Ω .

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo che $d = 2$. Sia $X_0 \in \Omega$ un punto fissato. Dimostreremo che

$$f(X) = f(X_0) \quad \text{per ogni } X \in \Omega.$$

Definiamo l'insieme

$$A = \left\{ X \in \Omega : f(X) = f(X_0) \right\}.$$

Osserviamo che:

- Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto, allora per ogni punto $X = (x, y) \in \Omega$ esiste un quadrato Q centrato in X e contenuto in Ω :

$$Q := (-\ell + x, \ell + x) \times (-\ell + y, y + \ell) \subset \Omega;$$

- Se $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione derivabile e con gradiente nullo su un quadrato Q , allora la funzione f è costante su Q .

Di conseguenza, sia A che $\Omega \setminus A$ sono insiemi aperti il che implica che $\Omega \setminus A = \emptyset$. □

Proposizione 3 (Operazioni algebriche con le derivate parziali). La somma e il prodotto di funzioni derivabili sono funzioni derivabili e valgono le identità seguenti:

$$\partial_i(f + g) = \partial_i f + \partial_i g \quad e \quad \partial_i(fg) = f \partial_i g + g \partial_i f.$$

Dimostrazione. Segue direttamente dalle formule per le funzioni derivabili di una variabile. □

GLI SPAZI $C^k(\Omega)$

Definizione 4. Sia Ω un insieme aperto di \mathbb{R}^d e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data.

- (i) Diciamo che la funzione f è di classe C^0 su Ω , e scriviamo $f \in C^0(\Omega)$, o semplicemente $f \in C(\Omega)$, se la funzione f è continua su Ω .
- (ii) Diciamo che la funzione f è di classe C^1 su Ω , e scriviamo $f \in C^1(\Omega)$, se:
- f è derivabile in Ω ;
 - le derivate parziali $\partial_{x_i} f$, $i = 1, \dots, d$, sono funzioni continue su Ω .
- (iii) Diciamo che la funzione f è di classe C^2 su Ω , e scriviamo $f \in C^2(\Omega)$, se:
- la funzione f è derivabile in Ω ;
 - le sue derivate parziali $\partial_{x_i} f$, $i = 1, \dots, d$, sono a loro volta funzioni derivabili su Ω ;
 - le derivate parziali seconde $\partial_{x_j}(\partial_{x_i} f)$ sono funzioni continue su Ω , per ogni $i = 1, \dots, d$ e $j = 1, \dots, d$.

Osservazione 5. Per definizione, se $f \in C^k(\Omega)$, allora le sue derivate parziali sono in $C^{k-1}(\Omega)$.

Osservazione 6. In seguito, usando il teorema del differenziale totale, dimostreremo che

$$f \in C^2(\Omega) \Rightarrow f \in C^1(\Omega) \Rightarrow f \in C^0(\Omega).$$

UN ESEMPIO IMPORTANTE

Esempio 7. In dimensione $d \geq 2$, la sola derivabilità di una funzione fornisce ben poche informazioni sul suo comportamento locale. Infatti,

esistono funzioni definite su \mathbb{R}^2 e derivabili in ogni punto che non sono nemmeno continue!

Per esempio, la funzione

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

è derivabile in ogni punto, zero compreso, ma non è continua in $(0, 0)$. Infatti, siccome

$$\begin{cases} F(x, 0) = 0 & \text{per ogni } x \in \mathbb{R}, \\ F(0, y) = 0 & \text{per ogni } y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

otteniamo che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h, 0) - F(0, 0)}{h} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F(0, k) - F(0, 0)}{k} = 0,$$

e quindi le derivate parziali $\partial_x F(0, 0)$ e $\partial_y F(0, 0)$ esistono e sono uguali a zero. D'altra parte, se consideriamo la successione

$$X_n = (1/n, 1/n) \quad \text{per } n \geq 1,$$

abbiamo che

$$X_n \rightarrow (0, 0),$$

ma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n \cdot 1/n}{(1/n)^2 + (1/n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

che è diverso da $F(0, 0) = 0$. La funzione F quindi non è continua in $(0, 0)$.

COMPLEMENTI. DUE EQUAZIONI FUNZIONALI

Gli esercizi 10 e 12 sono non-standard per un corso di analisi 2 e sono quindi facoltativi (anche se si tratta di due applicazioni del Teorema 2).

Esercizio 8. Sia B un vettore di \mathbb{R}^d e sia $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$F(X) = B \cdot X \quad \text{per ogni } X \in \mathbb{R}^d.$$

Calcolare ∇F .

Esercizio 9. Dimostrare che se $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione derivabile su \mathbb{R}^d e tale che

$$\nabla F = \text{costante} \quad \text{su } \mathbb{R}^d,$$

allora F è della forma

$$F(x) = c + B \cdot X$$

per un qualche vettore $B \in \mathbb{R}^d$ ed una qualche costante $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 10. Trovare tutte le funzioni $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili su \mathbb{R}^d e tali che

$$F(X + Y) = F(X) + F(Y) \quad \text{per ogni } X, Y \in \mathbb{R}^d.$$

Esercizio 11. Sia $A = (a_{ij})_{ij}$ una matrice $d \times d$ con coefficienti reali e sia $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$F(X) = X \cdot AX \quad \text{per ogni } X \in \mathbb{R}^d,$$

che possiamo scrivere anche come

$$F(X) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij} x_i x_j \quad \text{per ogni } X = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Per ogni coppia di indici $i, j \in \{1, \dots, d\}$, calcolare le derivate parziali $\partial_i F(X)$ e $\partial_{ij} F(X)$.

Esercizio 12. Trovare tutte le funzioni $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 e tali che

$$F(X + Y) + F(X - Y) = 2(F(X) + F(Y)) \quad \text{per ogni } X, Y \in \mathbb{R}^d.$$