Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Una definizione equivalente di funzione continua

Definizione 1. *Siano $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione e $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un insieme. La preimmagine (detta anche controimmagine) di Ω è l'insieme*

$$F^{-1}(\Omega) = \Big\{X \in \mathbb{R}^n \ : \ F(X) \in \Omega\Big\}.$$

Teorema 2. *Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione data. Allora, sono equivalenti:*

(i) *F è continua;*

(ii) *per ogni insieme insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, la preimmagine $F^{-1}(\Omega)$ è un aperto.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima che (i)⇒(ii).
Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^m$ e $X_0 \in F^{-1}(\Omega)$. Allora, per definizione di $F^{-1}(\Omega)$, abbiamo che

$$Y_0 := F(X_0) \in \Omega.$$

Siccome Ω è aperto, esiste un raggio $r > 0$ tale che $B_r(Y_0) \subset \Omega$.
D'altra parte, siccome F è continua, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|X - X_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |F(X) - F(X_0)| < r\,,$$

che possiamo scrivere anche come

$$\text{per ogni} \quad X \in B_\delta(X_0) \quad \text{si ha che} \quad F(X) \in B_r(Y_0) \subset \Omega.$$

Di conseguenza,

$$B_\delta(X_0) \subset F^{-1}(\Omega),$$

il che conclude la prima parte della dimostrazione.

Dimostriamo ora che (ii)⇒(i). Siano $X_0 \in \mathbb{R}^n$ e $Y_0 := F(X_0) \in \mathbb{R}^m$. Dato $\varepsilon > 0$, consideriamo l'aperto

$$\Omega = B_\varepsilon(Y_0).$$

Siccome $F^{-1}(\Omega)$ è aperto e $X_0 \in F^{-1}(\Omega)$, esiste una palla

$$B_\delta(X_0) \subset F^{-1}(\Omega).$$

Possiamo scrivere questa inclusione come

$$X \in B_\delta(X_0) \qquad \Rightarrow \qquad F(X) \in B_\varepsilon(Y_0),$$

ovvero

$$|X - X_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |F(X) - F(X_0)| < \varepsilon.$$

Di conseguenza, F è continua in X_0. Siccome X_0 è arbitrario, abbiamo che F è continua. □

Più in generale, vale il seguente teorema.

Teorema 3. *Siano K un insieme in $\mathbb{R}^n$ ed $F : K \to \mathbb{R}^m$ una funzione data. Allora, sono equivalenti:*

(i) *F è continua;*

(ii) *per ogni insieme insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, esiste un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ tale che $F^{-1}(\Omega) = A \cap K$.*

Il sottografico di una funzione continua è un aperto

Proposizione 4. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, il sottografico*

$$\Omega := \Big\{(x, y) \ : \ y < f(x)\Big\}$$

è un insieme aperto in $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione. Definiamo la funzione

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad F(x, y) = f(x) - y.$$

La funzione F è continua e si ha che

$$\Omega = \Big\{(x, y) \ : \ y < f(x)\Big\} = \Big\{(x, y) \ : \ F(x, y) > 0\Big\} = F^{-1}\big((0, +\infty)\big).$$

Siccome, $(0, +\infty)$ è un aperto di $\mathbb{R}$, abbiamo che Ω è un aperto di $\mathbb{R}^2$. $\square$