Insiemi aperti e chiusi

Proposizione 1. *Mostrare che se Ω è un insieme sia aperto che chiuso in $\mathbb{R}^d$, allora*

$$\Omega = \mathbb{R}^d \qquad \textit{oppure} \qquad \Omega = \emptyset.$$

Dimostrazione. Supponiamo che l'insieme Ω ed il suo complementare sono entrambi non-vuoti. Allora, esistono due punti

$$X \in \Omega \qquad \text{e} \qquad Y \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega.$$

Definiamo $T \in [0,1]$ come

$$T = \sup\Big\{t \in [0,1] \ : \ (1-t)X + tY \in \Omega\Big\}.$$

Per la proprietà dell'insieme superiore, esiste una successione

$$T_n \in [0,1]$$

tale che

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \qquad \text{e} \qquad (1-T_n)X + T_nY \in \Omega.$$

Siccome

$$\lim_{n\to\infty}\Big((1-T_n)X + T_nY\Big) = (1-T)X + TY$$

e siccome Ω è chiuso, abbiamo che

$$(1-T)X + TY \in \Omega.$$

D'altra parte, siccome $Y \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$, abbiamo che $T < 1$. Usando che l'insieme superiore è un maggiorante, abbiamo che

$$(1-t)X + tY \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \qquad \text{per ogni} \qquad t \in (T,1].$$

Siccome $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ è anche chiuso, otteniamo che

$$(1-T)X + TY \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega.$$

In conclusione

$$(1-T)X + TY \in \Omega \qquad \text{e} \qquad (1-T)X + TY \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega,$$

il che è un assurdo. □