

Funzioni continue e preimmagini di insiemi aperti.

Il sottografico di una funzione continua è un aperto - dimostrazione alternativa

UNA DEFINIZIONE EQUIVALENTE DI FUNZIONE CONTINUA

Definizione 1. Siano $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione e $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un insieme. La **preimmagine** (detta anche **controimmagine**) di Ω è l'insieme

$$F^{-1}(\Omega) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : F(X) \in \Omega \right\}.$$

Teorema 2. Sia $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione data. Allora, sono equivalenti:

(i) F è continua;

(ii) per ogni insieme insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, la preimmagine $F^{-1}(\Omega)$ è un aperto.

Dimostrazione. Dimostriamo prima che (i) \Rightarrow (ii).

Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^m e $X_0 \in F^{-1}(\Omega)$. Allora, per definizione di $F^{-1}(\Omega)$, abbiamo che

$$Y_0 := F(X_0) \in \Omega.$$

Siccome Ω è aperto, esiste un raggio $r > 0$ tale che $B_r(Y_0) \subset \Omega$.

D'altra parte, siccome F è continua, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|X - X_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |F(X) - F(X_0)| < r,$$

che possiamo scrivere anche come

$$\text{per ogni } X \in B_\delta(X_0) \text{ si ha che } F(X) \in B_r(Y_0) \subset \Omega.$$

Di conseguenza,

$$B_\delta(X_0) \subset F^{-1}(\Omega),$$

il che conclude la prima parte della dimostrazione.

Dimostriamo ora che (ii) \Rightarrow (i). Siano $X_0 \in \mathbb{R}^n$ e $Y_0 := F(X_0) \in \mathbb{R}^m$. Dato $\varepsilon > 0$, consideriamo l'aperto

$$\Omega = B_\varepsilon(Y_0).$$

Siccome $F^{-1}(\Omega)$ è aperto e $X_0 \in F^{-1}(\Omega)$, esiste una palla

$$B_\delta(X_0) \subset F^{-1}(\Omega).$$

Possiamo scrivere questa inclusione come

$$X \in B_\delta(X_0) \quad \Rightarrow \quad F(X) \in B_\varepsilon(Y_0),$$

ovvero

$$|X - X_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |F(X) - F(X_0)| < \varepsilon.$$

Di conseguenza, F è continua in X_0 . Siccome X_0 è arbitrario, abbiamo che F è continua. □

Più in generale, vale il seguente teorema.

Teorema 3. *Siano K un insieme in \mathbb{R}^n ed $F : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione data. Allora, sono equivalenti:*

(i) F è continua;

(ii) per ogni insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, esiste un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ tale che $F^{-1}(\Omega) = A \cap K$.

IL SOTTOGRAFICO DI UNA FUNZIONE CONTINUA È UN APERTO

Proposizione 4. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, il sottografico*

$$\Omega := \{(x, y) : y < f(x)\}$$

è un insieme aperto in \mathbb{R}^2 .

Dimostrazione. Definiamo la funzione

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = f(x) - y.$$

La funzione F è continua e si ha che

$$\Omega = \{(x, y) : y < f(x)\} = \{(x, y) : F(x, y) > 0\} = F^{-1}((0, +\infty)).$$

Siccome, $(0, +\infty)$ è un aperto di \mathbb{R} , abbiamo che Ω è un aperto di \mathbb{R}^2 . □