Aperti e chiusi

Insiemi aperti

Definizione 1 (Insieme aperto)**.** *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Diciamo che A è aperto se:*

$$\text{per ogni } X \in A \text{ esiste un raggio } r > 0 \text{ tale che } B_r(X) \subset A.$$

Inoltre, per definizione, l'insieme vuoto $\emptyset$ è un insieme aperto.

Esempio 2. *$\mathbb{R}^d$ è un insieme aperto.*

Esempio 3. *In $\mathbb{R}^d$ gli insiemi costituiti da un solo punto* NON *sono aperti.*

Proposizione 4. *Dati un punto $X \in \mathbb{R}^d$ e un raggio $R > 0$, la palla*

$$B_R(X) = \Big\{Y \in \mathbb{R}^d \ : \ |X - Y| < R\Big\}.$$

è un iniseme aperto in $\mathbb{R}^d$.

Dimostrazione. Sia Y un punto in $B_R(X)$. Allora, per definizione,

$$|Y - X| < R.$$

Consideriamo il raggio

$$r := R - |X - Y|,$$

e la palla $B_r(Y)$. Dimostreremo che $B_r(Y) \subset B_R(X)$. Prendiamo un qualsiasi punto $Z \in B_r(Y)$. Allora, per definizione,

$$|Z - Y| < r.$$

Ora, per la disuguaglianza triangolare,

$$|Z - X| \le |Z - Y| + |Y - X| < r + |Y - X| = \Big(R - |X - Y|\Big) + |Y - X| = R.$$

Quindi $Z \in B_R(Y)$. $\square$

Esercizio 5. *Dati due numeri reali $a < b$, mostrare che l'intervallo aperto*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\},$$

è un aperto in $\mathbb{R}$.

Unione e intersezione di insiemi aperti

Teorema 6 (Unione e intersezione di aperti)**.**

(i) *L'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un aperto.*

(ii) *L'unione di una quasiasi famiglia (finita o infinita) di insiemi aperti è un aperto.*

Dimostrazione. Segue direttamente dalla definizione. $\square$

Esempio 7. *In generale, un insieme ottenuto come intersezione infinita di insiemi aperti potrebbe non essere aperto. Per esempio, dato un punto $X \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\bigcap_{n\ge1} B_{1/n}(X) = \{X\}$.*

Prodotto cartesiano di insiemi aperti

Teorema 8 (Prodotto cartesiano di aperti)**.** *Siano A_1 un aperto in $\mathbb{R}^n$ e A_2 un aperto in $\mathbb{R}^m$. Allora, il prodotto cartesiano $A_1 \times A_2$ è un aperto di $\mathbb{R}^{m+n}$.*

Corollario 9. *Dati due intervalli aperti (a,b) e (c,d), il rettangolo $(a,b) \times (c,d)$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$.*

Insiemi chiusi

Definizione 10. *Diciamo che un insieme $C \subset \mathbb{R}^d$ è* **chiuso***, se il suo complementare $\mathbb{R}^d \setminus C$ è aperto.*

Definizione 11. *Diciamo che un insieme $C \subset \mathbb{R}^d$ è* **chiuso per successioni***, se ha la proprietà seguente. Se $(X_n)_{n\geq 1}$ è una successione di punti di C che converge in $\mathbb{R}^d$ ad un qualche limite $X_\infty \in \mathbb{R}^d$, allora necessariamente $X_\infty \in C$.*

Teorema 12. *Sia C un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Allora, sono equivalenti:*

(1) *C è chiuso;*

(2) *C è chiuso per successioni.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima che (1) implica (2). Sia data una successione $X_n \in C$ che converge ad un certo $X_\infty \in \mathbb{R}^d$. Se, per assurdo, $X_\infty \notin C$, allora si avrebbe che $X_n \in \mathbb{R}^d \setminus C$. Siccome, per ipotesi, l'insieme $\mathbb{R}^d \setminus C$ è aperto, esiste un raggio $\delta > 0$ tale che

$$B_\delta(X_\infty) \subset \mathbb{R}^d \setminus C,$$

ovvero nella palla $B_\delta(X_\infty)$ non ci sono punti di C. Di conseguenza,

$$|X_n - X_\infty| \geq \delta \quad \text{per ogni} \quad n \geq 1,$$

e quindi X_n non può convergere a X_∞. Contraddizione. Quindi $X_\infty \in C$.

Dimostriamo ora che (2) implica (1). Consideriamo un punto $X_0 \in \mathbb{R}^d \setminus C$. Supponiamo per assurdo che non esiste nessun raggio $r > 0$ tale che $B_r(X_0) \subset \mathbb{R}^d \setminus C$. Allora, per ogni $n \geq 0$ esiste un punto X_n tale che:

$$X_n \in C \qquad \text{e} \qquad X_n \in B_{1/n}(X_0).$$

Ma allora, la successione X_n è una successione di punti di C che converge a X_0. Quindi, per ipotesi, $X_0 \in C$. Contraddizione. Di conseguenza, esiste $r > 0$ tale che $B_r(X_0) \subset \mathbb{R}^d \setminus C$. □

Esempi di insiemi chiusi

Esempio 13. *Per ogni $X \in \mathbb{R}^d$ l'insieme $\{X\}$ è un chiuso.*

Proposizione 14. *Consideriamo un punto $X \in \mathbb{R}^d$ ed un raggio $R > 0$. Allora:*

(i) *la palla chiusa*

$$\overline{B}_R(X) = \Big\{Y \in \mathbb{R}^d \ : \ |X - Y| \leq R\Big\}$$

è un insieme chiuso in $\mathbb{R}^d$;

(ii) *la sfera*

$$\partial B_R(X) = \Big\{Y \in \mathbb{R}^d \ : \ |X - Y| = R\Big\}$$

è un insieme chiuso in $\mathbb{R}^d$.

Proposizione 15. *Dato un vettore $V \in \mathbb{R}^d$ l'insieme*

$$\Big\{X \in \mathbb{R}^d \ : \ X \cdot V = 0\Big\}$$

è un chiuso. Più in generale, se l'insieme $S \subset \mathbb{R}^d$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^d$, allora S è chiuso.

Dimostrazione. Sia X_n una successione convergente in $\mathbb{R}^d$ tale che

$$X_n \cdot V = 0 \qquad \text{per ogni} \qquad n \geq 1.$$

Sia X_∞ il limite di X_n. Allora,

$$X_\infty \cdot V = \lim_{n\to\infty} X_n \cdot V = 0.$$

Quindi, per definizione,

$$X_\infty \in \Big\{X \in \mathbb{R}^d \ : \ X \cdot V = 0\Big\},$$

e quindi l'insieme $\Big\{X \in \mathbb{R}^d \ : \ X \cdot V = 0\Big\}$ è chiuso (per successioni). Per dimostrare la seconda parte, basta osservare che per ogni sottospazio vettoriale S esiste una famiglia di vettori $V_1, \dots, V_k$ tale che

$$S = \Big\{X \in \mathbb{R}^d \ : \ X \cdot V_1 = X \cdot V_2 = \dots = X \cdot V_k = 0\Big\}.$$

$\square$

Unione e intersezione di insiemi chiusi

Teorema 16 (Unione e intersezione di chiusi)**.**

(i) *L'unione di un numero finito di insiemi chiusi è un chiuso.*

(ii) *L'intersezione di una qualsiasi famiglia di insiemi chiusi è un chiuso.*

Dimostrazione. Segue dalle identità:

$$\bigcap_i \Big(\mathbb{R}^d \setminus A_i\Big) = \mathbb{R}^d \setminus \Big(\bigcup_i A_i\Big) \qquad \text{e} \qquad \bigcup_i \Big(\mathbb{R}^d \setminus A_i\Big) = \mathbb{R}^d \setminus \Big(\bigcap_i A_i\Big),$$

valide per una qualsiasi famiglia $\{A_i\}_i$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^d$. $\square$

Esercizio 17. *Trovare una successione $(C_n)_{n\geq 1}$ di insiemi chiusi tale per cui l'unione*

$$\bigcup_{n\geq 1} C_n$$

non è un chiuso.

Prodotto cartesiano di insiemi chiusi

Teorema 18 (Prodotto cartesiano di chiusi)**.** *Siano C_1 un chiuso in $\mathbb{R}^n$ e C_2 un chiuso in $\mathbb{R}^m$. Allora, il prodotto cartesiano $C_1 \times C_2$ è un chiuso di $\mathbb{R}^{m+n}$.*

Corollario 19. *Dati due intervalli chiusi $[a, b]$ e $[c, d]$, il rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ è un chiuso di $\mathbb{R}^2$.*

Esercizi

Esercizio 20. *Mostrare che se* Ω *è un insieme sia aperto che chiuso in* $\mathbb{R}^n$*, allora*

$$\Omega = \mathbb{R}^n \qquad \textit{oppure} \qquad \Omega = \emptyset.$$

Esercizio 21. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Mostrare che il grafico*

$$\Gamma = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = f(x)\Big\}$$

è un chiuso in $\mathbb{R}^2$*.*

Esercizio 22. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Dimostrare che il sottografico*

$$A = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < f(x)\Big\}$$

è un aperto in $\mathbb{R}^2$*.*

Esercizio 23. *Siano* A *un aperto e* C *un chiuso di* $\mathbb{R}^d$*. Allora:*

(i) *l'insieme* $A \setminus C$ *è aperto in* $\mathbb{R}^d$*;*

(ii) *l'insieme* $C \setminus A$ *è chiuso in* $\mathbb{R}^d$*.*