Teorema di Weierstrass in $\mathbb{R}^n$

Teorema 1 (Teorema di Weierstrass in $\mathbb{R}^d$)**.** *Sia K un insieme compatto per successioni in $\mathbb{R}^d$. Sia $F : K \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, F ammette un massimo ed un minimo su K.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme di valori della funzione $F : K \to \mathbb{R}$

$$\Big\{F(X) \ : \ X \in K\Big\} \subset \mathbb{R}$$

ed il suo estremo superiore

$$S := \sup\Big\{F(X) \ : \ X \in K\Big\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Per la definizione di estremo superiore, esiste una successione di valori

$$F(X_n) \in \Big\{F(X) \ : \ X \in K\Big\}$$

tale per cui

$$S = \lim_{n\to+\infty} F(X_n).$$

Ora, siccome K è compatto per successioni, esiste una sottosuccessione $X_{n_k} \in K$ convergente ad un qualche punto $X_\infty \in K$:

$$\lim_{k\to\infty} X_{n_k} = X_\infty \in K.$$

Siccome F è continua, si ha

$$\lim_{k\to\infty} F(X_{n_k}) = F(X_\infty).$$

D'altra parte, per costruzione

$$\lim_{k\to\infty} F(X_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} F(X_n) = S.$$

Quindi $S = F(X_\infty)$. Di conseguenza,

$$F(X_\infty) \geq F(X) \quad \text{per ogni} \quad X \in K.$$

Quindi X_∞ è un punto di massimo per F su K. □

Esercizi teorici

Esercizio 2 (Teorema di Weierstrass)**.** *Sia K un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ compatto per successioni. Sia $F : K \to \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Mostrare che anche l'insieme $F(K)$ è compatto.*

Esercizio 3 (Diametro di un insieme compatto)**.** *Sia K un sottoinsieme compatto per successioni e non vuoto di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che esistono due punti $X \in K$ e $Y \in K$ che realizzano il massimo*

$$\max\Big\{|X - Y| \ : \ X \in K,\ Y \in K\Big\}.$$

Esercizio 4. *Sia C un insieme chiuso e non vuoto in $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che per ogni $X \in \mathbb{R}$ esiste $Y \in C$ che realizza il minimo*

$$\mathrm{dist}(X, C) = \min\Big\{|Y - X| \ : \ Y \in C\Big\}.$$