Insiemi compatti in $\mathbb{R}^n$

Insiemi compatti

Definizione 1. *Diciamo che un insieme $K \subset \mathbb{R}^d$ è* **compatto per successioni** *se ogni successione $X_n \in K$ ammette una sottosuccessione convergente che ha come limite un punto di K.*

Teorema 2. *Sia K un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Allora sono equivalenti le affermazioni seguenti.*

(i) *K è chiuso e limitato;*

(ii) *K è compatto per successioni.*

Dimostrazione. (ii) $\Rightarrow$ (iii). Sia X_n una successione in K. Siccome K è limitato, lo è anche la successione X_n. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione X_{n_k} convergenete ad un qualche $X_\infty \in \mathbb{R}^n$. Siccome K è chiuso $X_\infty \in K$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Per assurdo, se K fosse illimtato esisterebbe una successione di punti $X_n \in K$ tale che $|X_n| \geq n$. Allora X_n non ammette sottosuccessioni convergenti. Contraddizione con (iii). Quindi K è limitato. Dimostriamo ora che K è chiuso (per successioni). Sia $X_n \in K$ una successione convergente ad un certo $X_\infty \in \mathbb{R}^d$. Per (iii) X_n ammette una sottosuccessione X_{n_k} converegnte ad un punto di K. Ma siccome la successione X_n converge, anche la successione X_{n_k} converge ed ha lo stesso limite. Quindi $X_\infty \in K$. □

Esercizi teorici

Esercizio 3. *Siano $K_1 \subset \mathbb{R}^d$ e $K_2 \subset \mathbb{R}^d$ due insiemi compatti per successioni. Dimostrare che $K_1 \cap K_2$ e $K_1 \cup K_2$ sono compatti per successioni.*

Esercizio 4. *Siano $K \subset \mathbb{R}^d$ un compatto per successioni e $C \subset \mathbb{R}^d$ un chiuso. Dimostrare che $K \cap C$ è un compatto per successioni. È vero che anche $K \cup C$ è un compatto per successioni.?*

Esercizio 5. *Siano $K \subset \mathbb{R}^d$ un compatto per successioni e $A \subset \mathbb{R}^d$ un aperto. Dimostrare che $K \setminus A$ è un compatto per successioni.*

Esercizio 6. *Siano $K_1 \subset \mathbb{R}^m$ e $K_2 \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi compatti per successioni. Dimostrare che l'insieme $K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^{m+n}$ è compatto per successioni.*

Esercizio 7. *Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ un compatto per successioni. Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ la sezione verticale*

$$S_a = \{(x, y) \in K \ : \ x = a\},$$

è un compatto per successioni.

Esercizio 8. *Dimostrare che, dato un insieme K compatto per successioni, anche la sua frontiera ∂K è un insieme compatto per successioni.*

Esercizio 9 (Esame orale, Dicembre 2021). *Sia $\Big\{K_n\Big\}_{n\geq 1}$ una successione di insiemi compatti non-vuoti di $\mathbb{R}^d$ tale che*

$$K_{n+1} \subset K_n \qquad \text{per ogni} \qquad n \geq 1.$$

Dimostrare che l'intersezione $\displaystyle\bigcap_{n\geq 1} K_n$ non è vuota.

Teorema di Weierstrass

Teorema 10 (Teorema di Weierstrass in $\mathbb{R}^d$)**.** *Sia K un insieme compatto per successioni in $\mathbb{R}^d$. Sia $F : K \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, F ammette un massimo ed un minimo su K.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme di valori della funzione $F : K \to \mathbb{R}$

$$\Big\{F(X) \ : \ X \in K\Big\} \subset \mathbb{R}$$

ed il suo estremo superiore

$$S := \sup\Big\{F(X) \ : \ X \in K\Big\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Per la definizione di estremo superiore, esiste una successione di valori

$$F(X_n) \in \Big\{F(X) \ : \ X \in K\Big\}$$

tale per cui

$$S = \lim_{n\to+\infty} F(X_n).$$

Ora, siccome K è compatto per successioni, esiste una sottosuccessione $X_{n_k} \in K$ convergente ad un qualche punto $X_\infty \in K$:

$$\lim_{k\to\infty} X_{n_k} = X_\infty \in K.$$

Siccome F è continua, si ha

$$\lim_{k\to\infty} F(X_{n_k}) = F(X_\infty).$$

D'altra parte, per costruzione

$$\lim_{k\to\infty} F(X_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} F(X_n) = S.$$

Quindi $S = F(X_\infty)$. Di conseguenza,

$$F(X_\infty) \geq F(X) \quad \text{per ogni} \quad X \in K.$$

Quindi X_∞ è un punto di massimo per F su K. □

Esercizi teorici

Esercizio 11 (Teorema di Weierstrass)**.** *Sia K un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ compatto per successioni. Sia $F : K \to \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Mostrare che anche l'insieme $F(K)$ è compatto.*

Esercizio 12 (Diametro di un insieme compatto)**.** *Sia K un sottoinsieme compatto per successioni e non vuoto di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che esistono due punti $X \in K$ e $Y \in K$ che realizzano il massimo*

$$\max\Big\{|X - Y| \ : \ X \in K,\ Y \in K\Big\}.$$

Esercizio 13. *Sia C un insieme chiuso e non vuoto in $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che per ogni $X \in \mathbb{R}$ esiste $Y \in C$ che realizza il minimo*

$$\operatorname{dist}(X, C) = \min\Big\{|Y - X| \ : \ Y \in C\Big\}.$$

Uniforme continuità e teorema di Cantor

Definizione 14 (Uniforme continuità)**.** *Siano Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione data. Diciamo che F è uniformemente continua su Ω, se:*

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

se $X, Y \in \Omega$ sono tali che $|X - Y| < \delta$, allora $|F(X) - F(Y)| < \varepsilon$.

Esempi di funzioni uniformemente continue

Esempio 15. *La funzione $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\delta(X) = |X|$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}^n$.*

Esempio 16. *La funzione $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $S(X) = |X|^2$ NON è uniformemente continua su $\mathbb{R}^n$.*

Esempio 17. *La funzione $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P(x, y) = x + y^2$ è uniformemente continua su*

$$\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| \le 1\Big\}.$$

Teorema di Cantor

Teorema 18 (Teorema di Cantor in $\mathbb{R}^n$)**.** *Sia K un insieme compatto in $\mathbb{R}^n$ e sia $F : K \to \mathbb{R}$ una funzione continua su K. Allora, F è uniformemente continua su K.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono due punti $X_n \in \mathcal{K}$ e $Y_n \in \mathcal{K}$ tali che

$$|X_n - Y_n| < \frac{1}{n}, \quad ma \quad |F(X_n) - F(Y_n)| \ge \varepsilon.$$

Siccome $\mathcal{K}$ è compatto esiste una sottosuccessione X_{n_k} di X_n convergente:

$$\lim_{k \to \infty} X_{n_k} = X_\infty \in \mathcal{K}.$$

Inoltre, abbiamo ancora che

$$|X_{n_k} - Y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \qquad e \qquad \big|F(X_{n_k}) - F(Y_{n_k})\big| \ge \varepsilon.$$

In particolare, anche la successione Y_{n_k} converge a X_∞. Ora, per la continuità di F si ha

$$\varepsilon \le \lim_{k \to \infty} |F(X_{n_k}) - F(Y_{n_k})\big| = |F(X_\infty) - F(X_\infty)\big| = 0.$$

Assurdo. $\square$