Insiemi compatti (per successioni) in $\mathbb{R}^d$

Insiemi compatti

Definizione 1. *Diciamo che un insieme $K \subset \mathbb{R}^d$ è* **compatto per successioni** *se ogni successione $X_n \in K$ ammette una sottosuccessione convergente che ha come limite un punto di K.*

Teorema 2. *Sia K un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Allora sono equivalenti le affermazioni seguenti.*

(i) *K è chiuso e limitato;*

(ii) *K è compatto per successioni.*

Dimostrazione. (ii) $\Rightarrow$ (iii). Sia X_n una successione in K. Siccome K è limitato, lo è anche la successione X_n. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione X_{n_k} convergenete ad un qualche $X_\infty \in \mathbb{R}^n$. Siccome K è chiuso $X_\infty \in K$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Per assurdo, se K fosse illimtato esisterebbe una successione di punti $X_n \in K$ tale che $|X_n| \geq n$. Allora X_n non ammette sottosuccessioni convergenti. Contraddizione con (iii). Quindi K è limitato. Dimostriamo ora che K è chiuso (per successioni). Sia $X_n \in K$ una successione convergente ad un certo $X_\infty \in \mathbb{R}^d$. Per (iii) X_n ammette una sottosuccessione X_{n_k} converegnte ad un punto di K. Ma siccome la successione X_n converge, anche la successione X_{n_k} converge ed ha lo stesso limite. Quindi $X_\infty \in K$. □

Esercizi teorici

Esercizio 3. *Siano $K_1 \subset \mathbb{R}^d$ e $K_2 \subset \mathbb{R}^d$ due insiemi compatti per successioni. Dimostrare che $K_1 \cap K_2$ e $K_1 \cup K_2$ sono compatti per successioni.*

Esercizio 4. *Siano $K \subset \mathbb{R}^d$ un compatto per successioni e $C \subset \mathbb{R}^d$ un chiuso. Dimostrare che $K \cap C$ è un compatto per successioni. È vero che anche $K \cup C$ è un compatto per successioni.?*

Esercizio 5. *Siano $K \subset \mathbb{R}^d$ un compatto per successioni e $A \subset \mathbb{R}^d$ un aperto. Dimostrare che $K \setminus A$ è un compatto per successioni.*

Esercizio 6. *Siano $K_1 \subset \mathbb{R}^m$ e $K_2 \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi compatti per successioni. Dimostrare che l'insieme $K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^{m+n}$ è compatto per successioni.*

Esercizio 7. *Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ un compatto per successioni. Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ la sezione verticale*

$$S_a = \{(x, y) \in K \ : \ x = a\},$$

è un compatto per successioni.

Esercizio 8. *Dimostrare che, dato un insieme K compatto per successioni, anche la sua frontiera ∂K è un insieme compatto per successioni.*

Esercizio 9 (Esame orale, Dicembre 2021). *Sia $\Big\{K_n\Big\}_{n\geq 1}$ una successione di insiemi compatti non-vuoti di $\mathbb{R}^d$ tale che*

$$K_{n+1} \subset K_n \qquad \text{per ogni} \qquad n \geq 1.$$

Dimostrare che l'intersezione $\displaystyle\bigcap_{n\geq 1} K_n$ non è vuota.