Insiemi connessi per archi

Curve in $\mathbb{R}^n$

Definizione 1. *Diciamo che una funzione*

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n,$$

è continua se ogni sua componente $\gamma_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è continua come funzione di una variabile.*

Definizione 2. *Una* **curva** *in* $\mathbb{R}^n$ *è una funzione continua*

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n,$$

definita su un intervallo $[a, b]$ *di* $\mathbb{R}$. *Più in generale, dato un insieme* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *una curva in* Ω *è una funzione continua*

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

a valori in Ω, *ovvero tale che*

$$\gamma(t) \in \Omega \quad \text{per ogni} \quad t \in [a, b].$$

Definizione 3. *Dati un insieme* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e due punti* $X, Y \in \Omega$, *diremo che una curva (in* Ω*)*

$$\gamma : [a, b] \to \Omega$$

connette i punti X *e* Y *(in* Ω*), se*

$$\gamma(a) = X \qquad e \qquad \gamma(b) = Y.$$

Sostegno di una curva

Definizione 4. *Data una curva* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, *si dice* **sostegno di** γ *il sottoinsieme di* $\mathbb{R}^n$

$$\Big\{\gamma(t) \ : \ t \in [a, b]\Big\}.$$

Curve diverse possono avere lo stesso sostegno. Ecco qualche esempio.

Esempio 5. *Il sostegno della curva*

$$\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 *in* $\mathbb{R}^2$.

Esempio 6. *Il sostegno della curva*

$$\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 *in* $\mathbb{R}^2$.

Esempio 7. *Il sostegno della curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos(3t), \sin(3t))$$

è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 *in* $\mathbb{R}^2$.

Insiemi connessi per archi

Definizione 8. *Diciamo che un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ è* **connesso per archi (c.p.a.)** *se per ogni coppia di punti $X, Y \in \mathbb{R}^d$, esiste una curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ con sostegno in Ω e tale che*

$$\gamma(0) = X \quad e \quad \gamma(1) = Y.$$

Teorema del valore intermedio

Teorema 9 (Teorema del valore intermedio)**.** *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme connesso per archi ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se esistono $X \in \Omega$ e $Y \in \Omega$ tali che*

$$F(X) > 0 \qquad e \qquad F(Y) < 0\,,$$

allora esiste anche $Z \in \Omega$ tale che

$$F(Z) = 0.$$

Proof. Per ipotesi esiste una curva

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$$

tale che

$$\gamma(a) = X\,, \quad \gamma(b) = Y\,, \quad \gamma(t) \in \Omega \quad \text{per ogni} \quad t \in (a,b).$$

Allora, la funzione composta

$$F \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}\,, \qquad (F \circ \gamma)(t) = F(\gamma(t)),$$

è una funzione continua tale che

$$(F \circ \gamma)(a) = F(X) > 0 \qquad \text{e} \qquad (F \circ \gamma)(b) = F(Y) < 0\,.$$

Per il teorema del valore intermedio per funzioni di una variabile, esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$(F \circ \gamma)(c) = F(\gamma(c)) = 0.$$

Quindi, basta prendere $Z := \gamma(c)$. □