

ESERCIZI

Esercizio 1 (Dicembre 2021). Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 .

$$(A) \quad A = \{(x, y) : x^2 + 3y^2 \leq 1\} \quad (B) \quad B = \{(x, y) : x^2 \leq y^2 \leq x^2 + 1\}$$

$$(C) \quad C = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq x\} \quad (D) \quad D = \{(x, y) : x^2 + 3y^2 \leq 1\} \setminus \{(x, y) : x = 0\}$$

$$(E) \quad E = \{(x, y) : x^2 + 3y^2 \leq 1\} \cap \{(x, y) : x = 0\}$$

Gli insiemi seguenti sono **compatti** :

Gli insiemi seguenti sono **chiusi ma non compatti** :

Esercizio 2 (Dicembre 2021). Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 .

$$(A) \quad A = \{(x, y) : x^2 + 3y^2 > 1\} \quad (B) \quad B = \{(x, y) : x^2 < y^2 < x^2 + 1\}$$

$$(C) \quad C = \{(x, y) : x^2 < y < x\} \quad (D) \quad D = \{(x, y) : x^2 + 3y^2 < 1\} \setminus \{(x, y) : x \geq 0\}$$

$$(E) \quad E = \{(x, y) : x^2 + 3y^2 < 1\} \cap \{(x, y) : x > 0\}$$

Gli insiemi seguenti sono **aperti** :

Gli insiemi seguenti sono **chiusi** :

La domanda "Trovare la frontiera di Ω " è stata aggiunta a posteriori.

Esercizio 3 (Settembre 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = \overline{B}_2(0, 0) \setminus B_1(1, 0)$$

Dire se Ω è:

- aperto;
- chiuso;
- compatto;
- connesso per archi;
- stellato;
- convesso.

Trovare la frontiera di Ω .

Esercizio 4 (Settembre 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = B_1(0,0) \cup B_1(1,0) \setminus \{(x,y) : y=0, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

- (1) $\text{int}(\Omega) = \Omega$;
- (2) $\overline{\Omega} = \Omega$;
- (3) $\partial\Omega = \partial B_1(0,0) \cup \partial B_1(1,0)$;
- (4) $\partial\Omega = \partial B_1(0,0) \cup \partial B_1(1,0) \cup \{(x,y) : y=0, 0 \leq x \leq 1\}$;
- (5) $\partial\Omega = \partial B_1(0,0) \cup \partial B_1(1,0) \cup \{(x,y) : y=0, 0 < x < 1\}$;
- (6) $\partial\Omega = \emptyset$

Esercizio 5 (Luglio 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = \overline{B}_1(0,0) \cup B_1(2,0).$$

Dire se Ω è:

- aperto;
- chiuso;
- compatto;
- connesso per archi;
- stellato;
- convesso.

Trovare la frontiera di Ω .

Esercizio 6 (Luglio 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = \overline{B}_1(-2,0) \cup \overline{B}_1(2,0) \cup \{(x,y) : y=0, -2 < x < 2\}.$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

- (1) $\text{int}(\Omega) = \Omega$;
- (2) $\overline{\Omega} = \Omega$;
- (3) $\partial\Omega = \partial B_1(-2,0) \cup \partial B_1(2,0)$;
- (4) $\partial\Omega = \partial B_1(-2,0) \cup \partial B_1(2,0) \cup \{(x,y) : y=0, -2 \leq x \leq 2\}$;
- (5) $\partial\Omega = \partial B_1(-2,0) \cup \partial B_1(2,0) \cup \{(x,y) : y=0, -1 < x < 1\}$;
- (6) $\partial\Omega = \emptyset$.

Esercizio 7 (Giugno 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = \overline{B}_2(0,0) \setminus B_1(1,0).$$

Dire se Ω è:

- aperto;
- chiuso;
- compatto;
- connesso per archi;
- stellato;
- convesso.

Trovare la frontiera di Ω .

Esercizio 8 (Giugno 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = B_1(0,0) \cup \{(x,y) : xy = 0\}.$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

- (1) $\text{int}(\Omega) = \Omega$;
- (2) $\overline{\Omega} = \Omega$;
- (3) $\partial\Omega = \partial B_1$;
- (4) $\partial\Omega = \partial B_1 \cup \{(x,y) : xy = 0\}$;
- (5) $\partial\Omega = \overline{B}_1 \cap \{(x,y) : xy = 0\}$;
- (6) $\partial\overline{\Omega} = \partial B_1$.

Esercizio 9 (Giugno 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = B_2(0,0) \setminus \{(x,0) : 0 < x < 2\}.$$

Dire se Ω è:

- aperto;
- chiuso;
- compatto;
- connesso per archi;
- stellato;
- convesso.

Trovare la frontiera di Ω .

Esercizio 10 (Giugno 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = B_1(0,0) \setminus \{(x,y) : xy = 0\}.$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

- (1) $\text{int}(\Omega) = \Omega$;
- (2) $\bar{\Omega} = \Omega$;
- (3) $\partial\Omega = \partial B_1$;
- (4) $\partial\Omega = \partial B_1 \cup \{(x,y) : xy = 0\}$;
- (5) $\partial\Omega = \bar{B}_1 \cap \{(x,y) : xy = 0\}$;
- (6) $\partial\bar{\Omega} = \partial B_1$.

Esercizio 11 (Aprile 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = \bar{B}_2(0,0) \setminus \partial B_1(2,0).$$

Dire se Ω è:

- aperto;
- chiuso;
- compatto;
- connesso per archi;
- stellato;
- convesso.

Trovare la frontiera di Ω .

Esercizio 12 (Aprile 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = \bar{B}_2(0,0) \cap \partial B_1(2,0).$$

Dire se Ω è:

- aperto;
- chiuso;
- compatto;
- connesso per archi;
- stellato;
- convesso.

Trovare la frontiera di Ω .

Esercizio 13 (Aprile 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = \overline{B}_1(0,0) \cap \partial B_2(1,0).$$

Dire se Ω è:

- aperto;
- chiuso;
- compatto;
- connesso per archi;
- stellato;
- convesso.

Trovare la frontiera di Ω .

Esercizio 14 (Aprile 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = B_1(0,0) \cap \partial B_2(1,0).$$

Dire se Ω è:

- aperto;
- chiuso;
- compatto;
- connesso per archi;
- stellato;
- convesso.

Trovare la frontiera di Ω .

Esercizio 15 (Aprile 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = B_1(0,0) \setminus \{(x,y) : x^2 = y^2\}.$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

- (1) $\text{int}(\Omega) = \Omega$;
- (2) $\overline{\Omega} = \Omega$;
- (3) $\partial\Omega = \partial B_1$;
- (4) $\partial\Omega = \partial B_1 \cup \{(x,y) : x^2 = y^2\}$;
- (5) $\partial\Omega = \overline{B}_1 \cap \{(x,y) : x^2 = y^2\}$;
- (6) $\partial\overline{\Omega} = \partial B_1$.

Esercizio 16 (Aprile 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = B_1(0, 0) \cap \{(x, y) : x^2 = y^2\}.$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

- (1) $\text{int}(\Omega) = \Omega$;
- (2) $\overline{\Omega} = \Omega$;
- (3) $\partial\Omega = \partial B_1$;
- (4) $\partial\Omega = \partial B_1 \cap \{(x, y) : x^2 = y^2\}$;
- (5) $\partial\Omega = \partial B_1 \cap \{(x, y) : x^2 = y^2\}$;
- (6) $\partial\overline{\Omega} = \partial B_1$.

Esercizio 17 (Febbraio 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = ([0, 2] \times [0, 2]) \setminus B_1(0, 0).$$

Dire se Ω è:

- aperto;
- chiuso;
- compatto;
- connesso per archi;
- stellato;
- convesso.

Trovare la frontiera di Ω .

Esercizio 18 (Febbraio 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = ([0, 2] \times [0, 2]) \setminus \partial B_1(0, 0).$$

Dire se Ω è:

- aperto;
- chiuso;
- compatto;
- connesso per archi;
- stellato;
- convesso.

Trovare la frontiera di Ω .

Esercizio 19 (Febbraio 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = \left((0, 2) \times (0, 2) \right) \setminus \partial B_1(0, 0).$$

Dire se Ω è:

- aperto;
- chiuso;
- compatto;
- connesso per archi;
- stellato;
- convesso.

Trovare la frontiera di Ω .

Esercizio 20 (Febbraio 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = \left((0, 2) \times (0, 2) \right) \setminus \overline{B}_1(0, 0).$$

Dire se Ω è:

- aperto;
- chiuso;
- compatto;
- connesso per archi;
- stellato;
- convesso.

Trovare la frontiera di Ω .

Esercizio 21 (Febbraio 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = \left((0, 2) \times (0, 2) \right) \cap \overline{B}_1(0, 0).$$

Dire se Ω è:

- aperto;
- chiuso;
- compatto;
- connesso per archi;
- stellato;
- convesso.

Trovare la frontiera di Ω .

Esercizio 22 (Febbraio 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = ([0, 2] \times [0, 2]) \cap \overline{B}_1(0, 0).$$

Dire se Ω è:

- aperto;
- chiuso;
- compatto;
- connesso per archi;
- stellato;
- convesso.

Trovare la frontiera di Ω .

Esercizio 23 (Febbraio 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = B_2(0, 0) \setminus \{(x, y) : xy = 1\}.$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

- (1) $\text{int}(\Omega) = \Omega$;
- (2) $\overline{\Omega} = \Omega$;
- (3) $\partial\Omega = \partial B_1$;
- (4) $\partial\Omega = \partial B_1 \cup \{(x, y) : xy = 1\}$;
- (5) $\partial\overline{\Omega} = \partial B_1 \cap \{(x, y) : xy = 1\}$;
- (6) $\partial\overline{\Omega} = \partial B_1$.

Esercizio 24 (Febbraio 2021). In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = B_1(0, 0) \cup \partial B_2(0, 0).$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

- (1) $\text{int}(\Omega) = \Omega$;
- (2) $\overline{\Omega} = \Omega$;
- (3) $\partial\Omega = \partial B_1$;
- (4) $\partial\Omega = \partial B_1 \cup \partial B_2$;
- (5) $\partial(\text{int}(\Omega)) = \partial B_1$;
- (6) $\partial(\text{int}(\Omega)) = \partial B_1 \cup \partial B_2$.