Limiti di funzioni

Definizioni

Definizione 1. *Siano Ω un sottoinsieme qualsiasi di $\mathbb{R}^d$ e $X_0 \in \Omega$ un punto fissato in Ω. Sia $F : \Omega \setminus \{X_0\} \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali.*

(1) *Diciamo che il numero reale ℓ è il limite di F per $X \to X_0$ e scriviamo*

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell, \tag{1}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\textit{per ogni } X \in \Omega \textit{ tale che } |X - X_0| < \delta \textit{ si ha che } |F(X) - \ell| < \varepsilon,$$

che possiamo scrivere in modo equivalente come

$$X \in \Omega \cap B_\delta(X_0) \quad \Rightarrow \quad |F(X) - \ell| < \varepsilon.$$

(2) *Diciamo che F tende a più infinito per $X \to X_0$ e scriviamo*

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = +\infty, \tag{2}$$

se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\textit{per ogni } X \in \Omega \textit{ tale che } |X - X_0| < \delta \textit{ si ha che } F(X) > M.$$

o equivalentemente

$$X \in \Omega \cap B_\delta(X_0) \quad \Rightarrow \quad F(X) > M.$$

(3) *Diciamo che F tende a meno infinito per $X \to X_0$ e scriviamo*

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = -\infty, \tag{3}$$

se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\textit{per ogni } X \in \Omega \textit{ tale che } |X - X_0| < \delta \textit{ si ha che } F(X) < -M.$$

o equivalentemente

$$X \in \Omega \cap B_\delta(X_0) \quad \Rightarrow \quad F(X) < -M.$$

Inoltre, se X_0 è un punto della parte interna di Ω, allora scriveremo semplicemente

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = \ell \qquad \textit{e} \qquad \lim_{X \to X_0} F(X) = \pm\infty$$

al posto di (1), (2) e (3).

Limiti di funzioni e limiti di successioni

Proposizione 2. *Siano Ω un sottoinsieme qualsiasi di $\mathbb{R}^d$, $X_0 \in \Omega$ un punto in Ω ed $F : \Omega \setminus \{X_0\} \to \mathbb{R}$ una funzione. Dato*

$$\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\},$$

sono equivalenti:

(1) $\displaystyle\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell$;

(2) *per ogni successione $(X_n)_n$ di punti di $\Omega \setminus \{X_0\}$ tale che $\lim_{n\to\infty} X_n = X_0$ si ha che*

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell\ .$$

Regole algebriche per il calcolo dei limiti

Proposizione 3. *Siano Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$ ed $F, G : \Omega \to \mathbb{R}$ due funzione a valori reali. Sia $X_0 \in \partial\Omega$ un punto tale che $X_0 \notin \Omega$. Se*

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = a \qquad e \qquad \lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} G(X) = b,$$

allora

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} (F + G) = a + b \qquad e \qquad \lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} FG = ab.$$

Inoltre, se $b \neq 0$, allora

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} \frac{F(X)}{G(X)} = \frac{a}{b}.$$

Proposizione 4. *Siano Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$ ed $F, G : \Omega \to \mathbb{R}$ due funzione a valori reali. Sia $X_0 \in \partial\Omega$ un punto tale che $X_0 \notin \Omega$. Se*

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = +\infty$$

e se G è una funzione limitata, allora

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} \frac{G}{F} = 0.$$