o-piccolo e O-grande

o-piccolo e O-grande per le funzioni di una variabile

Definizione 1. *Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una funzione di una variabile.*

- *Dato $k \geq 1$, diciamo che*
$$f(x) = o(x^k),$$
se
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^k} = 0.$$
- *Se invece $k = 0$, diremo che*
$$f(x) = o(1),$$
se
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Definizione 2. *Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una funzione di una variabile. Dato $k \geq 0$, diciamo che*
$$f(x) = O(x^k),$$
se esistono $\delta > 0$ e $C > 0$ tali che
$$|f(x)| \leq C|x|^k \quad \text{per ogni} \quad x \in (-\delta, \delta).$$

Osservazione 3. *Proprietà di o-piccolo e O-grande:*

- *Se $k \geq 0$ e $f(x) = o(x^k)$, allora $f(x) = O(x^k)$, ovvero*
$$o(x^k) = O(x^k).$$
- *Se $k \geq 2$ e $f(x) = O(x^k)$, allora $f(x) = o(x^{k-1})$, ovvero*
$$O(x^k) = o(x^{k-1}).$$
- *Se $k \geq 1$ e $f(x) = O(x^k)$, allora $\frac{f(x)}{x} = O(x^{k-1})$, ovvero*
$$\frac{O(x^k)}{x} = O(x^{k-1}).$$
- *Se $k \geq 1$ e $f(x) = o(x^k)$, allora $\frac{f(x)}{x} = o(x^{k-1})$, ovvero*
$$\frac{o(x^k)}{x} = o(x^{k-1}).$$
- *Se $k \geq 1$ e $f(x) = o(x^k)$, allora $f(x) = o(x^{k-1})$, ovvero*
$$o(x^k) = o(x^{k-1}) = o(x^{k-2}) = \cdots = o(x^2) = o(x) = o(1).$$
- *Se $k \geq 1$ e $f(x) = O(x^k)$, allora $f(x) = O(x^{k-1})$, ovvero*
$$O(x^k) = O(x^{k-1}) = O(x^{k-2}) = \cdots = O(x^2) = O(x) = O(1).$$

- *Se* $k \geq 0$, $f(x) = o(x^k)$ *e* $g(x) = o(x^k)$, *allora* $f(x) \pm g(x) = o(x^k)$, *ovvero*
$$o(x^k) \pm o(x^k) = o(x^k).$$
- *Se* $k \geq 0$, $f(x) = O(x^k)$ *e* $g(x) = O(x^k)$, *allora* $f(x) \pm g(x) = O(x^k)$, *ovvero*
$$O(x^k) \pm O(x^k) = O(x^k).$$
- *Se* $k, m \geq 0$, $f(x) = O(x^k)$ *e* $g(x) = O(x^m)$, *allora* $f(x)g(x) = O(x^{k+m})$, *ovvero*
$$O(x^k)O(x^m) = O(x^{k+m}).$$
- *Se* $k, m \geq 0$, $f(x) = o(x^k)$ *e* $g(x) = O(x^m)$, *allora* $f(x)g(x) = o(x^{k+m})$, *ovvero*
$$o(x^k)O(x^m) = o(x^{k+m}).$$
- *Se* $k \geq 0$ *e* $f(x) = o(x^k)$ *e se* $m \geq 0$ *e* $\varphi(x) = o(x^m)$, *allora* $\varphi(f(x)) = o(x^{km})$.
- *Se* $k \geq 1$ *e* $f(x) = O(x^k)$ *e se* $m \geq 0$ *e* $\varphi(x) = O(x^m)$, *allora* $\varphi(f(x)) = O(x^{km})$.
- *Se* $k \geq 1$ *e* $f(x) = O(x^k)$ *e se* $m \geq 0$ *e* $\varphi(x) = o(x^m)$, *allora* $\varphi(f(x)) = o(x^{km})$. *Infatti,*
$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(f(x))}{x^{km}} = \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(f(x))}{f(x)^m} \left(\frac{f(x)}{x^k} \right)^m = 0.$$
- *Per ogni* $k \geq 0$, *abbiamo che* $x^k = O(x^k)$.
- *Sono noti gli sviluppi:*
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \ ; \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4) \ ;$$
$$\sin x = x + o(x^2) \ ; \quad \sin x = x + O(x^3) \ ;$$
$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \ ; \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) \ ;$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2) \ ; \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^3) \ ;$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2) \ ; \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + O(x^3) \ ;$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \ ; \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3) \ ;$$

---

o-PICCOLO E O-GRANDE PER LE FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Definizione 4. *Sia $F:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ una funzione di due variabili.*

- o**-piccolo.** *Dato $k\ge 0$, diremo che*

$$F(x,y)=o\Big(|(x,y)|^k\Big)=o\Big(\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k\Big),$$

se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{F(x,y)}{\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k}=0,$$

ovvero se

$$\text{Per ogni } \varepsilon>0 \text{ esiste } \delta>0 \text{ tale che: } \quad 0<|(x,y)|<\delta \quad\Rightarrow\quad \frac{|F(x,y)|}{\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k}<\varepsilon.$$

- O**-grande.** *Dato $k\ge 0$, diremo che*

$$F(x,y)=O\Big(|(x,y)|^k\Big)=O\Big(\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k\Big),$$

se

$$\text{Esistono } C>0 \text{ e } \delta>0 \text{ tali che: } \quad 0<|(x,y)|<\delta \quad\Rightarrow\quad \frac{|F(x,y)|}{\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k}<C.$$

---

o-PICCOLO IN COORDINATE POLARI

Sia $F:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Sia $k\ge 0$. Allora,

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{F(x,y)}{\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k}=0$;

è equivalente a

(ii) Per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che:

$$0<|(x,y)|<\delta \quad\Rightarrow\quad \frac{|F(x,y)|}{\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k}<\varepsilon.$$

Siccome ogni punto $(x,y)\neq(0,0)$ si può scrivere come

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta \quad\text{per}\quad r>0,\ \theta\in[0,2\pi],$$

abbiamo che (ii) è equivalente a:

(iii) Per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che:

$$0<r<\delta \quad\text{e}\quad \theta\in[0,2\pi] \quad\Rightarrow\quad \frac{\big|F(r\cos\theta,r\sin\theta)\big|}{r^k}<\varepsilon.$$

Ora, osserviamo che l'affermazione (iii) è equivalente a

(iv) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$0 < r < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \frac{\big|F(r\cos\theta, r\sin\theta)\big|}{r^k} < \varepsilon.$$

Infine, per la definizione di limite, (iv) è equivalente a

(v)

$$\lim_{r\to 0}\left\{\sup_{\theta\in[0,2\pi]} \frac{\big|F(r\cos\theta, r\sin\theta)\big|}{r^k}\right\} = 0.$$

Abbiamo quindi dimostrato la proposizione seguente:

Proposizione 5. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Sia $k \geq 0$. Allora, sono equivalenti:*

(1) $F(x,y) = o\Big(|(x,y)|^k\Big)$.

(2) $\sup_{\theta\in[0,2\pi]} \big|F(r\cos\theta, r\sin\theta)\big| = o\big(r^k\big)$.

Per alleggerire la notazione, introduciamo la seguente convenzione.

Definizione 6. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Sia $k \geq 0$.*

Diremo che $\quad F(r\cos\theta, r\sin\theta) = o(r^k)$, *se* $\quad \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \big|F(r\cos\theta, r\sin\theta)\big| = o\big(r^k\big)$.

O-grande in coordinate polari

Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Siano $k \geq 0$ un numero intero e $C > 0$ una costante positiva. Allora, l'affermazione

(i) Esiste $\delta > 0$ tale che

$$\frac{|F(x,y)|}{\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k} < C \qquad \text{per ogni} \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \ ;$$

è equivalente a

(ii) Esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\frac{|F(r\cos\theta, r\sin\theta)|}{r^k} < C \qquad \text{per ogni} \quad 0 < r < \delta \quad \text{ed ogni} \quad \theta \in [0, 2\pi] \ .$$

L'affermazione (ii) è a sua volta equivalente a

(iii) Esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi]} \frac{|F(r\cos\theta, r\sin\theta)|}{r^k} < C \qquad \text{per ogni} \quad 0 < r < \delta \ .$$

Abbiamo quindi dimostrato la proposizione seguente:

Proposizione 7. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Sia $k \geq 0$. Allora, sono equivalenti:*

(1) $F(x,y) = O\Big(|(x,y)|^k\Big)$.

(2) $\sup\limits_{\theta\in[0,2\pi]} \big|F(r\cos\theta, r\sin\theta)\big| = O\big(r^k\big)$.

Come per l'o-piccolo, introduciamo la seguente convenzione.

Definizione 8. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Sia $k \geq 0$.*

Diremo che $\quad F(r\cos\theta, r\sin\theta) = O(r^k)$, *se* $\quad \sup\limits_{\theta\in[0,2\pi]} \big|F(r\cos\theta, r\sin\theta)\big| = O\big(r^k\big)$.

Definizioni equivalenti di o-piccolo e O-grande

Proposizione 9 (Definizioni equivalenti di O-grande)**.** *Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabile. Siano $k \geq 0$ un numero naturale e $C > 0$ una costante reale. Allora, sono equivalenti:*

(1) *Esiste $\delta > 0$ tale che:*

$$0 < |(x,y)| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{|F(x,y)|}{\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k} \leq C.$$

(2) *Esiste $\delta > 0$ tale che:*

$$0 < r < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^k} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |F(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq C.$$

(3) *Per ogni successione $r_n \to 0$, esiste $N > 0$ tale che*

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_n^k} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |F(r_n\cos\theta, r_n\sin\theta)| \leq C.$$

(4) *Per ogni successione $(x_n, y_n) \to (0,0)$, esiste $N > 0$ tale che*

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad \frac{|F(x_n,y_n)|}{\big(\sqrt{x_n^2+y_n^2}\big)^k} \leq C.$$

Proposizione 10 (Definizioni equivalenti di o-piccolo)**.** *Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabile. Sia $k \geq 0$ un numero naturale. Allora, sono equivalenti:*

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{F(x,y)}{\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k} = 0$.

(2) $\lim\limits_{r\to 0} \left\{\dfrac{1}{r^k} \sup\limits_{\theta\in[0,2\pi]} |F(r\cos\theta, r\sin\theta)|\right\} = 0$.

(3) *Per ogni successione $r_n \to 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{r_n^k} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |F(r_n\cos\theta, r_n\sin\theta)|\right\} = 0.$$

(4) *Per ogni successione $(x_n, y_n) \to (0,0)$,*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{|F(x_n,y_n)|}{\big(\sqrt{x_n^2+y_n^2}\big)^k}\right\} = 0.$$

Proprietà di o-piccolo e O-grande

- Se $k \geq 0$ e $F(x,y) = o(|(x,y)|^k)$, allora $F(x,y) = O(|(x,y)|^k)$, ovvero
$$o(|(x,y)|^k) = O(|(x,y)|^k).$$

- Se $k \geq 2$ e $F(x,y) = O(|(x,y)|^k)$, allora $F(x,y) = o(|(x,y)|^{k-1})$, ovvero
$$O(|(x,y)|^k) = o(|(x,y)|^{k-1}).$$

- Se $k \geq 1$ e $F(x,y) = O(|(x,y)|^k)$, allora $\dfrac{F(x,y)}{|(x,y)|} = O(|(x,y)|^{k-1})$, ovvero
$$\frac{O(|(x,y)|^k)}{\sqrt{x^2+y^2}} = O(|(x,y)|^{k-1}).$$

- Se $k \geq 1$ e $F(x,y) = o(|(x,y)|^k)$, allora $\dfrac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = o(|(x,y)|^{k-1})$, ovvero
$$\frac{o(|(x,y)|^k)}{|(x,y)|} = o(|(x,y)|^{k-1}).$$

- Se $k \geq 1$ e $F(x,y) = o(|(x,y)|^k)$, allora
$$F(x,y) = o(|(x,y)|^{k-1}),$$
ovvero
$$o(|(x,y)|^k) = o(|(x,y)|^{k-1}) = o(|(x,y)|^{k-2}) = \cdots = o(|(x,y)|^2) = o(|(x,y)|) = o(1).$$

- Se $k \geq 1$ e $F(x,y) = O(|(x,y)|^k)$, allora
$$F(x,y) = O(|(x,y)|^{k-1}),$$
ovvero
$$O(|(x,y)|^k) = O(|(x,y)|^{k-1}) = O(|(x,y)|^{k-2}) = \cdots = O(|(x,y)|^2) = O(|(x,y)|) = O(1).$$

- Se $k \geq 0$, $F(x,y) = o(|(x,y)|^k)$ e $G(x,y) = o(|(x,y)|^k)$, allora
$$F(x,y) \pm G(x,y) = o(|(x,y)|^k),$$
ovvero
$$o(|(x,y)|^k) \pm o(|(x,y)|^k) = o(|(x,y)|^k).$$

- Se $k \geq 0$, $F(x,y) = O(|(x,y)|^k)$ e $G(x,y) = O(|(x,y)|^k)$, allora
$$F(x,y) \pm G(x,y) = O(|(x,y)|^k),$$
ovvero
$$O(|(x,y)|^k) \pm O(|(x,y)|^k) = O(|(x,y)|^k).$$

- Se $k, m \geq 0$, $F(x,y) = O(|(x,y)|^k)$ e $G(x,y) = O(|(x,y)|^m)$, allora
$$F(x,y)G(x,y) = O(|(x,y)|^{k+m}),$$
ovvero
$$O(|(x,y)|^k)O(|(x,y)|^m) = O(|(x,y)|^{k+m}).$$

- Se $k, m \geq 0$, $F(x,y) = o(|(x,y)|^k)$ e $G(x,y) = O(|(x,y)|^m)$, allora
$$F(x,y)G(x,y) = o(|(x,y)|^{k+m}),$$
ovvero
$$o(|(x,y)|^k)O(|(x,y)|^m) = o(|(x,y)|^{k+m}).$$
- Se $k \geq 0$ e $F(x,y) = o(|(x,y)|^k)$ e se $m \geq 0$ e $\varphi(t) = o(t^m)$, allora
$$\varphi(F(x,y)) = o(|(x,y)|^{km}).$$
- Se $k \geq 1$ e $F(x,y) = O(|(x,y)|^k)$ e se $m \geq 0$ e $\varphi(t) = O(t^m)$, allora
$$\varphi(F(x,y)) = O(|(x,y)|^{km}).$$
- Se $k \geq 1$ e $F(x,y) = O(|(x,y)|^k)$ e se $m \geq 0$ e $\varphi(t) = o(t^m)$, allora
$$\varphi(F(x,y)) = o(|(x,y)|^{km}).$$
- Per ogni $k \geq 0$ e $m \geq 0$, abbiamo che
$$x^k y^m = O(|(x,y)|^k).$$
Infatti,
$$|x^k y^m| = |x|^k |y|^m \leq \big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k \big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^m = |(x,y)|^{k+m}.$$

Qualche esempio

- $y = o(1)$; $x = o(1)$;
- $y = O(\sqrt{x^2+y^2}) = O(r)$; $x = O(\sqrt{x^2+y^2}) = O(r)$;
- $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = O(1)$;
- $\sin y = O(\sqrt{x^2+y^2}) = O(r)$;
- $\cos x - 1 = O(x^2+y^2) = O(r^2)$;
- $e^y = 1 + O(\sqrt{x^2+y^2}) = 1 + O(r)$;
- $\cos y = 1 + o(\sqrt{x^2+y^2}) = 1 + o(r)$;
- $\dfrac{1}{1+xy} = 1 + O(x^2+y^2) = 1 + O(r^2) = 1 + o(r)$.