Limiti, liminf e limsup all'inifinito

Definizioni

Definizione 1. *Siano Ω un sottoinsieme illimitato di $\mathbb{R}^d$ ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali.*

(1) *Diciamo che il numero reale ℓ è il limite di F per $|X| \to +\infty$ e scriviamo*

$$\lim_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell, \tag{1}$$

se vale una delle seguenti proprietà equivalenti:

- *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che*

  per ogni $X \in \Omega$ tale che $|X| > R$ si ha che $|F(X) - \ell| < \varepsilon$;

- *per ogni successione $X_n \in \Omega$ tale che $|X_n| \to +\infty$ si ha*

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell.$$

(2) *Diciamo che F tende a più infinito per $|X| \to +\infty$ e scriviamo*

$$\lim_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = +\infty, \tag{2}$$

se vale una delle seguenti proprietà equivalenti:

- *per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

  per ogni $X \in \Omega$ con $|X| > R$ si ha che $F(X) > M$.

- *per ogni successione $X_n \in \Omega$ tale che $|X_n| \to +\infty$ si ha* $\lim\limits_{n\to\infty} F(X_n) = +\infty$.

(3) *Diciamo che F tende a meno infinito per $|X| \to +\infty$ e scriviamo*

$$\lim_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = -\infty, \tag{3}$$

se vale una delle seguenti proprietà equivalenti:

- *per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

  per ogni $X \in \Omega$ con $|X| > R$ si ha che $F(X) < -M$.

- *per ogni successione $X_n \in \Omega$ tale che $|X_n| \to +\infty$ si ha che* $\lim\limits_{n\to\infty} F(X_n) = -\infty$.

(4) *Definiamo il limite superiore di F*

$$\limsup_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X)$$

come

$$\sup\Big\{\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \ : \ \text{esiste una successione } \ X_n \in \Omega,\ |X_n| \to +\infty, \ \ \text{tale che } \ \lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell\Big\}.$$

(5) *Definiamo il limite inferiore di F*

$$\liminf_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X)$$

come

$$\inf\Big\{\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \ : \ \text{esiste una successione } \ X_n \in \Omega,\ |X_n| \to +\infty, \ \ \text{tale che } \ \lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell\Big\}.$$

Proposizione 2. *Siano* Ω *un insieme illimitato in* $\mathbb{R}^d$ *ed* $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione data. Dato* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*, sono equivalenti:*

(i) $\displaystyle \liminf_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell \quad e \quad \limsup_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell$;

(ii) $\displaystyle \lim_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell$.

Calcolo di limsup e liminf in coordinate polari e sferiche

Proposizione 3. *Siano* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un insieme illimitato ed* $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione a valori reali. Allora*

$$\limsup_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = \limsup_{R \to +\infty} \Big\{ \sup_{\Omega \cap \partial B_R} F \Big\} \qquad e \qquad \liminf_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = \liminf_{R \to +\infty} \Big\{ \inf_{\Omega \cap \partial B_R} F \Big\}.$$

Esercizio 4. *Calcolare*

$$\limsup_{\substack{|(x,y)| \to +\infty \\ (x,y) \in \Omega}} F(x,y) \qquad e \qquad \liminf_{\substack{|(x,y)| \to +\infty \\ (x,y) \in \Omega}} F(x,y).$$

(1) $\displaystyle F(x,y) = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 + y^2 + 1}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y \geq 0\}$;

(2) $\displaystyle F(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y \geq 0\}$;

(3) $\displaystyle F(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y \geq 0\}$;

(4) $\displaystyle F(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < y < x < 2y\}$;

(5) $\displaystyle F(x,y) = \frac{xy}{1 + x^2}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < 2y < x < 3y\}$;

(6) $\displaystyle F(x,y) = \frac{e^{x+y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < y < x < 2y\}$;

(7) $\displaystyle F(x,y) = \frac{e^{y-x}}{x^2 + y^2}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < y < x < 2y\}$;

(8) $\displaystyle F(x,y) = \frac{y}{y^2 - x^2 + 1}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| < y\}$;

(9) $\displaystyle F(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y > 1\}$;

(10) $\displaystyle F(x,y) = \frac{x^2 + y}{y^2 + x}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$;

(11) $\displaystyle F(x,y) = \frac{x + 2y}{y + 2x}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 1, \ y \geq 2\}$;

(12) $\displaystyle F(x,y) = \frac{2y - x^2}{x + y}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq x^2\}$.

Dimostrazione di Proposizione 2

Definiamo l'insieme di tutti i limiti di F all'infinito come

$$\mathcal{L} = \Big\{ \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \ : \ \text{esiste una successione} \ \ X_n \in \Omega, \ |X_n| \to +\infty, \ \ \text{tale che} \ \ \lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell \Big\}.$$

In particolare, abbiamo che

$$\liminf_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = \inf \mathcal{L} \qquad \text{e} \qquad \limsup_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = \sup \mathcal{L} \ .$$

(ii)⇒(i). Supponiamo ora che esiste il imite

$$L := \lim_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X).$$

Allora, per ogni successione $X_n \in \Omega$, $|X_n| \to +\infty$ si ha che

$$F(X_n) \to L.$$

Di conseguenza, l'insieme $\mathcal{L}$ ha come unico elemento L e quindi

$$\inf \mathcal{L} = \sup \mathcal{L} = L.$$

(i)⇒(ii). Supponiamo che

$$L = \inf \mathcal{L} = \sup \mathcal{L}.$$

Ci sono tre possibilità:

$$L \in \mathbb{R} \ , \quad L = +\infty \quad \text{e} \quad L = -\infty \, .$$

Studieremo il caso $L \in \mathbb{R}$ (i casi $L = \pm\infty$ sono analoghi). Supponiamo per assurdo che F non converge ad L. Esistono quindi un $\varepsilon > 0$ ed una successione $X_n \in \Omega$ tale che

$$|X_n| \to +\infty \qquad \text{e} \qquad |F(X_n) - L| \geq \varepsilon.$$

A meno di passare ad una sottosuccessione, possiamo assumere che $F(X_n)$ converge ad un limite

$$a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

Siccome

$$|a - L| \geq \varepsilon,$$

abbiamo che

$$a \geq L + \varepsilon \qquad \text{oppure} \qquad a \leq L - \varepsilon,$$

ma siccome a è un elemento dell'insieme $\mathcal{L}$, questo contraddirebbe l'ipotesi $L = \inf \mathcal{L} = \sup \mathcal{L}$. $\square$

Dimostrazione di Proposizione 3

Lemma 5. *Siano Ω un insieme illimitato in $\mathbb{R}^d$ ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione data. Allora, esistono due successioni $X_n \in \Omega$ e $Y_n \in \Omega$ tali che*

$$|X_n| \to +\infty \ , \qquad |Y_n| \to +\infty \ ,$$

che realizzano i limiti superiore e inferiore, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) \ = \ \liminf_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} F(Y_n) \ = \ \limsup_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) \ .$$

Dimostrazione del lemma. Sia
$$L := \limsup_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X).$$
Ci sono quindi tre possibilità:
$$L \in \mathbb{R}\,, \quad L = +\infty \quad \text{e} \quad L = -\infty\,.$$
Dimostreremo il lemma nel caso
$$L \in \mathbb{R}.$$
Per la definzione di L, esiste una successione $(\ell_k)_{k\geq 1}$ di limiti
$$\ell_k = \lim_{n\to\infty} F(X_n^k) \qquad \text{dove} \qquad X_n^k \in \Omega \quad (\text{per ogni } n \geq 1) \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} |X_n^k| = +\infty,$$
che converge ad L:
$$\lim_{k\to+\infty} \ell_k = L.$$
Ora, per ogni $k \geq 1$, possiamo trovare un indice $n(k)$ (abbastanza grande) tale che
$$|X_{n(k)}^k| \geq k \qquad \text{e} \qquad \big|F(X_{n(k)}^k) - \ell_k\big| < \frac{1}{k}\,.$$
Di conseguenza, la successione
$$Y_k := X_{n(k)}^k$$
è tale che
$$\lim_{k\to\infty} |Y_k| = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{k\to\infty} F(Y_k) = L.$$
$\square$

Dimostrazione di Proposizione 3. Sia
$$L := \limsup_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X).$$
Inoltre, per ogni $R \in (0, +\infty)$ definiamo
$$g(R) = \sup_{\Omega\cap\partial B_R} F.$$
Mostreremo che
$$L = \limsup_{R\to+\infty} g(R).$$
Per il Lemma precedente, abbiamo che esiste una successione $Y_n \in \Omega$ tale che
$$\lim_{n\to+\infty} |Y_n| = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} F(Y_n) = L\,.$$
Ora, definendo
$$R_n := |Y_n|,$$
abbiamo che
$$F(Y_n) \leq \sup_{Y\in\partial B_{R_n}\cap\Omega} F(Y) = g(R_n).$$
Passando al limite per $n \to \infty$, otteniamo
$$L = \lim_{n\to+\infty} F(Y_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} g(R_n) \leq \limsup_{R\to+\infty} g(R). \tag{4}$$
Viceversa, supponiamo che R_k sia una successione di raggi tale che:

- $\lim_{k\to+\infty} R_k = +\infty$;

- la successione
$$g(R_k)\,, \quad k \geq 1,$$
converge ad un qualche limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Ora, per la definizione di
$$\sup_{X\in\Omega\cap\partial B_{R_k}} F(X),$$
su ogni sfera ∂B_{R_k} possiamo trovare un punto X_k tale che
$$X_k \in \partial B_{R_k} \cap \Omega \qquad \text{e} \qquad \big|F(X_k) - g(R_k)\big| \leq \frac{1}{k}.$$
Abbiamo quindi costruito una successione $X_k \in \Omega$ tale che
$$|X_k| = R_k \to +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{k\to+\infty} F(X_k) = \ell.$$
Per la definizione di
$$\limsup_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X)$$
si ha che
$$\ell \leq \limsup_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X).$$
Siccome questa disuguaglianza vale per il limite ℓ di una qualsiasi successione $g(R_k)$, abbiamo che
$$\limsup_{R\to+\infty} g(R) \leq \limsup_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = L,$$
il che, insieme a (4), conclude la dimostrazione. $\square$