Prova scritta – Gennaio 2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Matricola:

Parte 1

(Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con* B_R *indichiamo la palla di raggio* $R > 0$ *e centro* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$

$$B_R = \Big\{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 < R^2\Big\}.$$

Consideriamo gli insiemi

(A) $\Omega_A = \Big\{[0,1] \times [0,1]\Big\} \setminus B_1$; (B) $\Omega_B = \Big\{[0,1] \times [0,1]\Big\} \cap B_1$;

(C) $\Omega_C = \Big\{[0,1] \times [0,1]\Big\} \cup B_1$; (D) $\Omega_D = B_1 \setminus \Big\{[0,1] \times [0,1]\Big\}$;

(E) $\Omega_E = \Big\{(0,1] \times (0,1]\Big\} \cup B_1$; (F) $\Omega_F = B_1 \cap \Big\{(0,1] \times (0,1]\Big\}$.

Gli insiemi seguenti sono **aperti** :	D, F
Gli insiemi seguenti sono **chiusi** :	A

Esercizio 2. *Consideriamo le seguenti funzioni di due variabili.*

(A) $A(x,y) = xy$ (B) $B(x,y) = x(x+y)$

(C) $C(x,y) = x^2(x^2+y^2)$ (D) $D(x,y) = xy(x^2+y^2)$ (E) $E(x,y) = x^2 - y^2$

Le seguenti funzioni hanno un **minimo relativo** in $(0,0)$:	C
Le seguenti funzioni hanno un **massimo relativo** in $(0,0)$:	nessuno
Le seguenti funzioni hanno un **punto di sella** in $(0,0)$:	A, B, D, E

$\sin(xy) = xy + o(x^2+y^2)$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in zero la funzione* $\dfrac{1}{1-x-\sin(xy)}$.

$$\frac{1}{1-x-\sin(xy)} = \frac{1}{1-x-xy+o(x^2+y^2)} = 1+x+xy+x^2+o(x^2+y^2)$$

Esercizio 4. *Calcolare la derivata* $\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t))$, *dove:*

$$\gamma(t) = \Big(e^{3t+t^2} - e^t\,,\ \sin(4t)\cos(2t)\Big) \qquad e \qquad F(x,y) = (1+x-y)^2 + (1+xy)^3.$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = \gamma'(0)\cdot\nabla F(\gamma(0)) = (2,4)\cdot(2,-2) = -4$$

Esercizio 5. *Trovare tutti i punti critici della funzione* $F(x,y) = \dfrac{x-y^2}{1+x^2}$ *in* $\mathbb{R}^2$.

I punti critici sono: $(1,0)$, $(-1,0)$

Esercizio 6. *Calcolare la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{x(x-3y)}{1+xy}$ *nel punto* $(0,0)$. *Dire se* H *è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa o indefinita.*

$H = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ *La matrice* H *è:* indefinita

---

Esercizio 7. *Calcolare l'integrale della funzione* $F(x,y) = y$ *sull'insieme*

$$\Omega = B_1 \cap \Big\{(x,y)\ :\ x \geq 0,\ y \geq 0\Big\}.$$

$$\iint_\Omega F(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Esercizio 8. *Dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{3x}{x^2+y^2+2}\,,\ \frac{2x-y}{x^2+y^2+3}\right),$$

calcolare l'integrale della divergenza di F *sulla palla di raggio 1 e centro* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$.

$$\iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy = \frac{3}{4}\pi$$

Esercizio 9. *Per quali valori del parametro* $c \in \mathbb{R}$ *la forma* $\alpha = (yx^2+x)\,dx + \big(cx^3+c^2y\big)\,dy$ *è chiusa ?*

$c = \dfrac{1}{3}$

Parte 2

Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - 2xy + \frac{1}{3}y^3.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{\left(x^2+y^2\right)^{1/2} xy}{x^2 + y^2(x^2+y^2)}.$$

Calcolare $\limsup\limits_{|(x,y)|\to\infty} F(x,y)$ *e* $\liminf\limits_{|(x,y)|\to\infty} F(x,y)$ *e dire se esiste il limite* $\lim\limits_{|(x,y)|\to\infty} F(x,y)$.

Esercizio 12. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(x+xy)y^2}{x^2+y^2} \quad se\ (x,y) \neq (0,0).$$

(1) *Dire se F è derivabile in zero e calcolare, se esiste il gradiente $\nabla F(0,0) = (0,0)$.*

(2) *Dire se F è derivabile su $\mathbb{R}^2$ e determinare se le sue derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ sono funzioni continue su $\mathbb{R}^2$.*

(3) *Dire se F è differenziabile in zero.*

(4) *Dire se F è continua su $\mathbb{R}^2$.*

(5) *Calcolare, al variare del vettore $V = (a,b) \neq (0,0)$, la derivata direzionale*

$$\partial_V F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tV).$$

---

10 $\quad F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - 2xy + \frac{1}{3}y^3$

(x,y) è un punto critico $\iff \nabla F(x,y) = (0,0)$

$$\iff \begin{cases} \partial_x F(x,y) = 0 \\ \partial_y F(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ -2x + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} \\ -2x + \dfrac{x^4}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = x^2/2 \\ x(x^3 - 8) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} a^3 - b^3 \\ \parallel \\ (a-b)(a^2+ab+b^2) \end{matrix}}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = x^2/2 \\ x(x-2)(x^2+4x+4) = 0 \end{cases}$$

I punti critici sono

$$(x,y) = (0,0) \quad \text{e} \quad (x,y) = (2,2).$$

La matrice hessiana di F in un generico punto (x,y) è:

$$D^2F(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}F & \partial_{xy}F \\ \partial_{yx}F & \partial_{yy}F \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x & -2 \\ -2 & 2y \end{pmatrix}.$$

1) Nel punto critico $(0,0)$

$$D^2F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det\left(D^2F(0,0)\right) = -4 \Rightarrow$$

- $D^2F(0,0)$ è indefinita;
- $(0,0)$ è un punto di sella.

2) Invece, in $(2,2)$

$$D^2F(2,2) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\det\left(D^2F(2,2)\right) = 4^2 - (-2)^2 = 12 > 0$$

$$\mathrm{tr}\left(D^2F(2,2)\right) = 4+4 = 8 > 0$$

$\Rightarrow \begin{cases} \bullet\ D^2F(2,2) \text{ è definita positiva} \\ \bullet\ (2,2) \text{ è un punto di MINIMO RELATIVO.} \end{cases}$

(11) In coordinate polari,

$$x = R\cos\Theta, \quad y = R\sin\Theta,$$

abbiamo

$$F(R\cos\Theta, R\sin\Theta) = \frac{R^3\cos\Theta\sin\Theta}{R^2\cos^2\Theta + R^4\sin^2\Theta}$$

$$= \frac{R\cos\Theta\sin\Theta}{\cos^2\Theta + R^2\sin^2\Theta}.$$

$$\partial_\Theta\left[F(R\cos\Theta, R\sin\Theta)\right] = 0$$

$$\iff \partial_\Theta\left[R\cos\Theta\sin\Theta\right]\left(\cos^2\Theta + R^2\sin^2\Theta\right)$$
$$- R\cos\Theta\sin\Theta\,\partial_\Theta\left[\cos^2\Theta + R^2\sin^2\Theta\right] = 0$$

$$\iff \cancel{R}\left(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta\right)\left(\cos^2\Theta + R^2\sin^2\Theta\right)$$
$$- \cancel{R}\cos\Theta\sin\Theta\left(-2\sin\Theta\cos\Theta + 2R^2\cos\Theta\sin\Theta\right) = 0$$

$$\iff \cos^2\Theta - R^2\sin^2\Theta = 0$$

Siccome $\cos^2\Theta + \sin^2\Theta = 1$, abbiamo

$$\cos^2\Theta = \frac{R^2}{1+R^2}, \quad \sin^2\Theta = \frac{1}{1+R^2}.$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \pm \frac{R}{\sqrt{1+R^2}} \ ; \ \sin\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1+R^2}}.$$

$$\max_{\theta} F(R\cos\theta, R\sin\theta)$$

$$= \frac{R^3 \frac{R}{\sqrt{1+R^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+R^2}}}{R^2 \cdot \frac{R^2}{1+R^2} + R^4 \cdot \frac{1}{1+R^2}} = \frac{1}{2}.$$

Analogamente

$$\min_{\theta} F(R\cos\theta, R\sin\theta) = -\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \limsup_{|(x,y)|\to+\infty} F(x,y) = \lim_{R\to+\infty} \left\{ \sup_{\theta} F(R\cos\theta, R\sin\theta) \right\}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\liminf_{|(x,y)|\to+\infty} F(x,y) = \lim_{R\to+\infty} \left\{ \inf_{\theta} F(R\cos\theta, R\sin\theta) \right\}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ il limite $\lim\limits_{|(x,y)|\to+\infty} F(x,y)$ non esiste.

---

(12) $$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+xy)y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Siccome $\dfrac{xy^3}{x^2+y^2} = O(x^2+y^2)$,

abbiamo che

- F è continua in $(0,0)$

  $\Leftrightarrow$ G è continua in $(0,0)$

- F è differenziabile in $(0,0)$

  $\Leftrightarrow$ G è differenziabile in $(0,0)$

- F è derivabile in $(0,0)$

  $\Leftrightarrow$ G è derivabile in $(0,0)$,

dove G è la funzione :

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1) G è derivabile in $(0,0)$. Infatti,

$$\lim_{x\to 0} \frac{G(x,0) - G(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{G(0,y) - G(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

(4) Continuità di G.

$$|G(x,y) - G(0,0)| = |G(x,y)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|$$

In coordinate polari

$$G(x,y) = G(R\cos\theta, R\sin\theta) = R\cos\theta\sin^2\theta.$$

Siccome la funzione $\theta \mapsto \cos\theta\sin^2\theta$

è continua e limitata su $[0, 2\pi]$, abbiamo che

$$G(R\cos\theta, R\sin\theta) \leq R \cdot M,$$

dove $M = \max_{\theta \in [0,2\pi]} |\cos\theta \sin^2\theta|$.

Quindi: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |G(x,y)| = 0$.

$\Rightarrow$ G è continua in $(0,0)$

$\Rightarrow$ F è continua in $(0,0)$.

(5) Derivate direzionali.

Sia $V = (a,b) \neq (0,0)$.

$$\partial_V F(0,0) = \partial_V G(a,b)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} G(ta, tb)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{ta \cdot t^2 b^2}{t^2(a^2+b^2)} = \frac{ab^2}{a^2+b^2}.$$

(3) Ora, quando $a \neq 0$ e $b \neq 0$, abbiamo

$$\underbrace{\partial_v G(0,0)}_{= \frac{ab^2}{a^2+b^2}} \neq v \cdot \underbrace{DG(0,0)}_{(0,0)}$$

Quindi la funzione G non è differenziabile in $(0,0)$. Quindi neanche F è differenziabile in $(0,0)$.

(2) Se le derivate parziali

$$\partial_x F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\partial_y F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

fossero funzioni continue in $(0,0)$, per il teorema del differenziale si avrebbe che F è differenziabile in $(0,0)$. D'altra parte, abbiamo appena dimostrato che F <u>non</u> è differenziabile in $(0,0)$. Quindi, le derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ <u>NON</u> sono continue in $(0,0)$.