**Analisi Matematica II** **a.a.** 2021-2022

# Prova scritta – 25 Gennaio 2022

**Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...**

---

**Nome:**

---

**Cognome:**

---

## Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

**Esercizio 1.** *Con $B_R$ indichiamo la palla di raggio $R > 0$ e centro $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$*

$$B_R = \Big\{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 < R^2\Big\}.$$

*Consideriamo gli insiemi*

✓ $(A)$ $\Omega_A = \Big\{[0,2] \times [0,2]\Big\} \cap \partial B_1$ ; $\cancel{(B)}$ $\Omega_B = \Big\{[0,2] \times [0,2]\Big\} \setminus \partial B_1$ ;

✓ $(C)$ $\Omega_C = \Big\{[0,2] \times [0,2]\Big\} \cup \partial B_1$ ; $\cancel{(D)}$ $\Omega_D = \partial B_1 \setminus \Big\{[0,2] \times [0,2]\Big\}$ ;

$\cancel{(E)}$ $\Omega_E = \Big\{(0,2] \times (0,2]\Big\} \cup \partial B_1$ ; $\cancel{(F)}$ $\Omega_F = \partial B_1 \cap \Big\{(0,2] \times (0,2]\Big\}$ .

*Gli insiemi seguenti sono* **chiusi** *:* A, C

---

**Esercizio 2.** *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = B_1 \cup \Big\{(0,y) \ : \ y \geq 0\Big\} \setminus \Big\{(x,0) \ : \ -2 \leq x \leq 2\Big\}$$

$\partial D = \partial B_1 \cup \{(0,y) : y \geq 1\} \cup \{(x,0) : -1 \leq x \leq 1\}$

---

**Esercizio 3.** *Sviluppare fino al secondo ordine in $(0,0)$ la funzione* $\dfrac{e^{x+2y}}{1+xy}$ .

$\dfrac{e^{x+2y}}{1+xy} = \left(1 + x + 2y + \frac{1}{2}(x+2y)^2 + o(x^2+y^2)\right)\left(1 - xy + o(x^2+y^2)\right)$

$= 1 + x + 2y + \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 + o(x^2+y^2)$

---

**Esercizio 4.** *Siano* $\gamma(t) = \Big(\sin(3t)e^{2t}, \ e^{4t} - \cos(2t)\Big)$ *e* $F(x,y) = (1+x)^2 + (1-y)^3$.

$\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = \gamma'(0) \cdot \nabla F(\gamma(0))$

$= (3,4) \cdot (2,-3) = -6$

$(x+y)(2x+y)$

---

**Esercizio 5.** *Calcolare la matrice hessiana $H$ della funzione* $F(x,y) = \dfrac{(x+y)\sin(2x+y)}{\cos(x-y)}$ *in* $(0,0)$. *Dire se $H$ è definita positiva, semidefinita positiva, definita negativa, semidefinita negativa, indefinita.*

$H = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ *La matrice $H$ è:* indefinita

---

**Esercizio 6.** *Calcolare l'integrale della funzione* $F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$ *sulla palla* $B_1$.

$\iint_{B_1} F(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 z\,dz \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2-z^2}}\,d\theta = 2\pi(\sqrt{2}-1).$

---

**Esercizio 7.** *Consideriamo la forma* $\alpha = (x^5 - y^3)\,dx + x^3\,dy$ *e la curva* $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(\cos t, \sin t\big)$. *Calcolare* $\int_\gamma \alpha = \frac{3}{2}\pi$

---

## Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

---

**Esercizio 8.** *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^3 + 3xy - y^3.$$

*Trovare (se esistono!) i punti critici di $F$ in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

---

**Esercizio 9.** *Trovare i massimi ed i minimi della funzione*

$$F(x,y,z) = x + 2y - 2z\,,$$

*sull'insieme*

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\Big\}.$$

---

**Esercizio 10.** *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy\sqrt{x^2+y^2}}{y^2 + \big(x^2+y^2\big)^2}\ .$$

*Calcolare* $\limsup\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e* $\liminf\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e dire se esiste il limite* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

---

**Esercizio 11.** *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{xy^n}{x^2+y^2} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

*dove $n \ge 1$ è un numero intero.*

(1) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione $F$ è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione $F$ è differenziabile in $(0,0)$.*

---

(8) Cerchiamo i punti critici.

$$\begin{cases} \partial_x F = 0 \\ \partial_y F = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3x - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -x^2 \\ x - (-x^2)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -x^2 \\ x(x-1)(x^2+x+1) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ I punti critici sono

$(0,0)$ e $(1,-1)$.

Studiamo la matrice hessiana in $(0,0)$ e $(1,-1)$. In punto generico $(x,y)$ la matrice hessiana è data da

$$D^2F(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}F & \partial_{xy}F \\ \partial_{yx}F & \partial_{yy}F \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}.$$

Quindi, nel punto $(0,0)$ abbiamo

$$D^2F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siccome $\det\left(D^2F(0,0)\right) = -9 < 0$ abbiamo che $D^2F(0,0)$ è <u>indefinita</u> e quindi $(0,0)$ è un <u>punto di sella</u>.

Nel punto $(1,-1)$ invece abbiamo

$$\nabla^2 F(1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\nabla^2 F(1,-1)) = 36 - 9 > 0$$

$$\operatorname{tr}(\nabla^2 F(1,-1)) = 6 + 6 > 0$$

Quindi $\nabla^2 F(1,-1)$ è definita positiva. Di conseguenza, $(1,-1)$ è un punto di minimo relativo.

---

9 Osserviamo che l'insieme $D$ è un compatto e che la funzione $F$ è continua. Quindi, per il teorema di Weierstrass, $F$

ha un massimo su $D$. Ci sono due possibilità:

1. Il massimo di $F$ è raggiunto in un punto interno

$$(x,y,z) \in B_1$$

In questo caso si avrebbe che

$$\nabla F(x,y,z) = 0.$$

Ma calcolando il gradiente di $F$, osserviamo che $\nabla F = (1, 2, -2)$.

Quindi il massimo di $F$ non è raggiunto in $B_1$.

2. Il massimo di $F$ è raggiunto in un punto sul bordo

$$(x,y,z) \in \partial B_1.$$

Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange si ha che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \partial_x F = \lambda\, \partial_x [x^2+y^2+z^2] \\ \partial_y F = \lambda\, \partial_y [x^2+y^2+z^2] \\ \partial_z F = \lambda\, \partial_z [x^2+y^2+z^2] \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ -2 = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2\lambda)^2} + \frac{4}{(2\lambda)^2} + \frac{4}{(2\lambda)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{4} = \lambda^2 \Rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{3}{2}.$$

I candidati per massimo sono:

- $(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

- $(x,y,z) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Calcoliamo

$$F\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}\right) = 1 \cdot \tfrac{1}{3} + 2 \cdot \tfrac{2}{3} + (-2)\left(-\tfrac{2}{3}\right) = 3$$

$$F\left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = -3$$

Quindi il massimo di $F$ è

$$F\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}\right) = 3.$$

(10) In coordinate polari

$$x = R\cos\Theta \quad , \quad y = R\sin\Theta$$

abbiamo

$$F(R\cos\Theta, R\sin\Theta) = \frac{R^3\cos\Theta\sin\Theta}{R^2\sin^2\Theta + R^4}$$

$$= \frac{R\cos\Theta\sin\Theta}{\sin^2\Theta + R^2} .$$

$$\partial_\Theta\left[F(R\cos\Theta, R\sin\Theta)\right] = R(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta)(\sin^2\Theta + R^2) - R\cos\Theta\sin\Theta . 2\sin\Theta\cos\Theta$$

$$= -R\sin^2\Theta + R^3(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta)$$

$$= R\left[R^2\cos^2\Theta - \sin^2\Theta(1+R^2)\right]$$

Quindi:

$$\partial_\Theta\left[F(R\cos\Theta, R\sin\Theta)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow R^2\cos^2\Theta - \sin^2\Theta(1+R^2) = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2\Theta = \frac{R^2}{2+R^2} \quad , \quad \cos^2\Theta = \frac{1+R^2}{2+R^2} .$$

Quindi,

$$\max_{\theta} F(R\cos\theta, R\sin\theta) = \frac{R^3 \frac{R}{\sqrt{2+R^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+R^2}}{\sqrt{2+R^2}}}{R^2 \cdot \frac{R^2}{2+R^2} + R^4}$$

$$= \frac{\sqrt{1+R^2}}{3+R^2}$$

$$\min F(R\cos\theta, R\sin\theta) = -\frac{\sqrt{1+R^2}}{3+R^2}.$$

Di conseguenza,

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{R\to 0} \left\{ \sup_{\theta} F(R\cos\theta, R\sin\theta) \right\}$$
$$= \lim_{R\to 0} \frac{\sqrt{1+R^2}}{3+R^2} = \frac{1}{3}$$

$$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{R\to 0} \left\{ \inf_{\theta} F(R\cos\theta, R\sin\theta) \right\}$$
$$= \lim_{R\to 0} -\frac{\sqrt{1+R^2}}{3+R^2} = -\frac{1}{3}.$$

In particolare, il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ non esiste.

(11)

**Esercizio 11.** *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{xy^n}{x^2+y^2} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

*dove* $n \geq 1$ *è un numero intero.*

(1) *Per quali valori del parametro* $n \geq 1$ *la funzione è derivabile in* $(0,0)$.

(2) *Per quali valori del parametro* $n \geq 1$ *la funzione* $F$ *è continua in* $(0,0)$.

(3) *Per quali valori del parametro* $n \geq 1$ *la funzione* $F$ *è differenziabile in* $(0,0)$.

(1) $$\partial_x F(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x,0)-F(0,0)}{x} = 0$$

$$\partial_y F(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{F(0,y)-F(0,0)}{y} = 0.$$

Quindi, la funzione $F$ è derivabile per ogni $n \geq 1$.

(2) $$F(R\cos\theta, R\sin\theta) = \frac{R\cos\theta\,(R\sin\theta)^n}{R^2} = R^{n-1}\cos\theta(\sin\theta)^n.$$

Se $n = 1$, allora

- $$\limsup_{R\to 0}\left\{\sup_{\theta} F(R\cos\theta, R\sin\theta)\right\} = \sup_{\theta}\left\{\cos\theta\sin^n\theta\right\}$$

- $$\liminf_{R\to 0}\left\{\inf_{\theta} F(R\cos\theta, R\sin\theta)\right\} = \inf\left\{\cos\theta\sin^n\theta\right\}$$

Siccome

$$\sup_{\theta}\left\{\cos\theta\sin\theta\right\} \neq \inf_{\theta}\left\{\cos\theta\sin\theta\right\}$$

abbiamo che il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) \text{ non esiste}$$

e quindi la funzione $F$ <u>non</u> è continua in $(0,0)$.

Quando invece $n>1$, abbiamo che

$$\limsup_{R\to 0} \left\{ \sup F(R\cos\theta, R\sin\theta) \right\}$$

$$= \lim_{R\to 0} \left\{ R^{n-1} \sup_{\theta} |\cos\theta \sin^n\theta| \right\} = 0$$

$$\liminf_{R\to 0} \left\{ \inf F(R\cos\theta, R\sin\theta) \right\}$$

$$= \lim_{R\to 0} \left\{ R^{n-1} \inf_{\theta} |\cos\theta \sin^n\theta| \right\} = 0.$$

In conclusione,

$$F \text{ è continua} \iff n \geq 2.$$

(3) Per definizione

$F$ è differenziabile in $(0,0)$

se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|F(x,y)-F(0,0)-(x,y)\cdot\nabla F(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 .$$

In coordinate polari

$$\frac{F(R\cos\theta, R\sin\theta)}{R} = R^{n-2}\cos\theta\sin^n\theta .$$

Quindi $F$ è diff. in $(0,0)$

$$\iff \lim_{R\to 0}\left\{R^{n-2}\sup_{\theta}\left\{|\cos\theta\sin^n\theta|\right\}\right\}$$
$$= \lim_{R\to 0}\left\{R^{n-2}\inf_{\theta}\left\{|\cos\theta\sin^n\theta|\right\}\right\} = 0$$

$$\iff n \geq 3 .$$