Prova scritta – 15 Febbraio 2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con* B_R *indichiamo la palla di raggio* $R > 0$ *e centro* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$

$$B_R = \Big\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 < R^2\Big\}.$$

Consideriamo gli insiemi

(A) $\Omega_A = \partial B_1 \cup \{(0,0)\}$; (B) $\Omega_B = B_1 \cap \{(0,0)\}$;

(C) $\Omega_C = \overline{B}_1 \cup \{(0,0)\}$; (D) $\Omega_D = \overline{B}_1 \setminus \{(0,0)\}$;

(E) $\Omega_E = \overline{B}_2 \setminus B_1$; (F) $\Omega_F = B_2 \setminus \overline{B}_1$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti** *:*

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big([0,1]\times[0,1]\Big) \cap \Big\{(x,y)\ :\ y \geq x\Big\} \setminus \{(0,0)\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione* $\dfrac{\cos(y+x^2)}{1-\sin(x-y)}$.

$$\frac{\cos(y+x^2)}{1-\sin(x-y)} =$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\sqrt{1+2t}-1\,,\ \sqrt{1-3t}-1\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{e^{x+2y^2}-e^{y+x^2}}{1+2xy}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{e^{x^2} + e^{2y^2}}{1+2xy}$ *in* $(0,0)$. *Dire se* H *è definita positiva, semidefinita positiva, definita negativa, semidefinita negativa, indefinita.*

$H =$ *La matrice* H *è:*

Esercizio 6. *Calcolare l'integrale della funzione* $F(x,y) = e^{1-x^2-y^2}$ *sulla palla* B_1.

$\iint_{B_1} F(x,y)\,dx\,dy =$

Esercizio 7. *Siano* $\alpha = (x^2 - xy + y^2)\,dx + x\,dy$ *e* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *a tratti che parametrizza il bordo del quadrato* $[0,1]\times[0,1]$ *in senso antiorario.* *Calcolare* $\int_\gamma \alpha =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y + y^2.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F *in* $\mathbb{R}^2$ *e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

Esercizio 9. *Trovare i massimi ed i minimi della funzione*

$$F(x,y,z) = x - y + z\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z^2 \le 5\Big\}.$$

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}\Big(x^2+y^2+\frac{y^2}{x^2+y^2}\Big)}\ .$$

Calcolare $\limsup\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e* $\liminf\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e dire se esiste il limite* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{xy^2}{\big(x^2+y^2\big)^n} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

dove $n \ge 1$ *è un numero intero.*

(1) *Per quali valori del parametro* $n \ge 1$ *la funzione è derivabile in* $(0,0)$.

(2) *Per quali valori del parametro* $n \ge 1$ *la funzione* F *è continua in* $(0,0)$.

(3) *Per quali valori del parametro* $n \ge 1$ *la funzione* F *è differenziabile in* $(0,0)$.
