Prova scritta – 28/6/2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con B_R indichiamo la palla di raggio $R > 0$ e centro $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$*

$$B_R = \Big\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 < R^2\Big\}.$$

Consideriamo gli insiemi

✓ (A) $\Omega_A = \Big\{(-4,4)\times[-1,1]\Big\} \cap \partial B_3$;

~~(B)~~ $\Omega_B = \Big\{(-4,4)\times[-1,1]\Big\} \cup \partial B_3$;

~~(C)~~ $\Omega_C = \Big\{(-4,4)\times[-1,1]\Big\} \setminus B_3$;

~~(D)~~ $\Omega_D = \Big\{(-4,4)\times[-1,1]\Big\} \cap B_3$;

~~(E)~~ $\Omega_E = \Big\{(-4,4)\times[-1,1]\Big\} \cup \overline{B}_3$;

✓ (F) $\Omega_F = \Big\{(-4,4)\times[-1,1]\Big\} \cap \overline{B}_3$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti** : A, F

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y > x^2-1\Big\} \cap \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y \le 1-x^4\Big\}$$

$\partial D =$ $\{(x,y) : y = x^2-1,\ -1 \le x \le 1\} \cup \{(x,y) : y = 1-x^4,\ -1 \le x \le 1\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in $(0,0)$ la funzione*

$$\frac{\cos(x-y)}{2-e^y} = 1 + y - \frac{x^2}{2} + xy + y^2 + o(x^2+y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\sin(3t-t^2) - t^2\sin t\,,\ \sin(te^t)\Big)$ *e* $F(x,y) = (1+xy)e^{x-2y}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = 1$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{\cos(xy)e^{x+y}}{1-\sin(x-y)}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$$H = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$ *La matrice H è:* definita positiva

---

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (x^2 + 2xy)\,dx + (y^2 + xy)\,dy$ *e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x \le 1\}$ *in senso antiorario.*

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha = -\frac{1}{2}$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \Big((x^3 - y)e^{x^2+y^2},\, (y^3 + x^2)e^{x^2+y^2}\Big)$.

Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R = 1$, calcolare $\displaystyle\iint_{B_R} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy = \frac{3}{2}\pi e$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x(y^2 + y)e^x.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare il massimo della funzione*

$$F(x,y,z) = x + yz\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 + z^2 \le 3\Big\}.$$

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{y\sin(x^2+y^2)}{(1+y^2)(x^2+y^2)}\,.$$

Calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e* $\displaystyle\limsup_{|(x,y)|\to+\infty} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^2y(x^n + y^n)}{(x^2+y^2)^n} \quad se\ (x,y) \ne (0,0),$$

dove $n \ge 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione F è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.*
