Analisi Matematica II

a.a. 2021-2022

Prova scritta – 19/7/2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con $B_R(a,b)$ indichiamo la palla di raggio $R > 0$ e centro (a,b) in $\mathbb{R}^2$*

$$B_R(a,b) = \Big\{(x,y)\ :\ (x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2\Big\}.$$

Consideriamo gli insiemi

(A) $\Omega_A = \Big\{(0,2] \times (0,2]\Big\} \cap B_1(0,0)$;

(B) $\Omega_B = \Big\{(0,2] \times (0,2]\Big\} \cap B_1(2,0)$;

(C) $\Omega_C = \Big\{(0,2] \times (0,2]\Big\} \cap B_1(2,2)$;

(D) $\Omega_D = \Big\{(0,2] \times (0,2]\Big\} \cap \overline{B}_1(0,0)$;

(E) $\Omega_E = \Big\{(0,2] \times (0,2]\Big\} \cap \overline{B}_1(2,0)$;

(F) $\Omega_F = \Big\{(0,2] \times (0,2]\Big\} \cap \overline{B}_1(2,2)$.

Gli insiemi seguenti sono **chiusi** *:* F

Gli insiemi seguenti sono **aperti** *:* A

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 \le 1\Big\} \cup \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ y \ge 0\Big\}$$

$\partial D =$ $\{(x,y) : x^2+y^2=1,\ y \le 0\} \cup \{(x,0) : x \ge 1\} \cup \{(x,0) : x \le -1\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in $(0,0)$ la funzione*

$$\frac{e^{y+xy}}{\sqrt{\cos(2x)}} = 1 + y + xy + \frac{1}{2}y^2 + x^2$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(e^{2t+t^3} - \cos(3t-t^2),\ (1+t)\sin(t)\Big)$ e $F(x,y) = \dfrac{e^{2x-y}}{1+xy}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = 3$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{\sin(y-x)}{1+x-y^2}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *La matrice H è:* indefinita

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (y^2 + x^2)\,dx + xy\,dy$ *e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = B_1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0\}$ *in senso antiorario.*
Calcolare $\int_\gamma \alpha = -1/3$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \Big((2x-y)(1+x^2+y^2)^2,\ (y-2x)(3+x^2+y^2)\Big)$.
Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R=1$, calcolare $\iint_{B_R} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy =$ 12π

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^2y + y^2 + 2x^2.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare il massimo della funzione*

$$F(x,y,z) = x + 2y - 2z\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\Big\}.$$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\,,$$

calcolare $\limsup\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^2y^{n+1}(x-y)}{(x^2+y^2)^n} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0),$$

dove $n \geq 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.*