Prova scritta – 7/6/2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

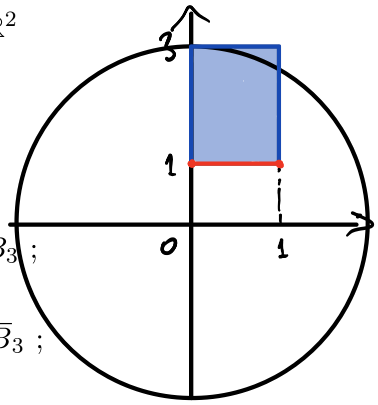
Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con B_R indichiamo la palla di raggio $R > 0$ e centro $(0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$*

$$B_R = \Big\{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 < R^2\Big\}.$$



Consideriamo gli insiemi

~~(A)~~ $\Omega_A = \Big\{[0, 1] \times (1, 3]\Big\} \cup \partial B_3$;

~~(B)~~ $\Omega_B = \Big\{[0, 1] \times (1, 3]\Big\} \cap B_3$;

✓ (C) $\Omega_C = \Big\{[0, 1] \times (1, 3]\Big\} \cap \partial B_3$;

✓ (D) $\Omega_D = \Big\{[0, 1] \times (1, 3]\Big\} \cup \overline{B}_3$;

✓ (E) $\Omega_E = \Big\{[0, 1] \times (1, 3]\Big\} \setminus B_3$;

~~(F)~~ $\Omega_F = \Big\{[0, 1] \times (1, 3]\Big\} \cap \overline{B}_3$.

Gli insiemi seguenti sono **chiusi** *:* C, D, E

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = B_1 \cup \Big\{\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, y\Big) \ : \ -2 \le y \le 3\Big\}$$

$\partial D =$ $\partial B_1 \cup \Big\{\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, y\Big) : -2 \le y \le -\frac{1}{2}\Big\} \cup \Big\{\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, y\Big) : \frac{1}{2} \le y \le 3\Big\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in $(0, 0)$ la funzione*

$$\frac{e^x \cos y}{1 - \sin(xy)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + o(x^2 + y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big((1 - 2t)e^t - e^{2t}, \ e^t - (1 + 3t)^2\Big)$ *e* $F(x, y) = (1 - xy)e^{x+y}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = \gamma'(0) \cdot DF(\gamma(0))$$

$$= \gamma'(0) \cdot DF(0,0) = (-3, -5) \cdot (1, 1) = -8.$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{e^{xy}\cos y}{2-\cos x}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *La matrice H è:* semidefinita negativa

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^3)\,dx + (x + y\sin y)\,dy$ *e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y - y^3,\ y \geq 0\}$ *in senso antiorario.* *Calcolare* $\int_\gamma \alpha = \int_0^1 (1+y^2)y(1-y^2)\,dy = \int_0^1 (y-y^5)\,dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \Big((x^3-3y)\cos(\pi(x^2+y^2))\,,\,(x-y^3)\cos(2\pi(x^2+y^2))\Big)$.
Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R=1$, calcolare $\iint_{B_R} \mathrm{div}F(x,y)\,dx\,dy = -\frac{3}{2}\pi$.

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = (y^2 - xy)e^x.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare i massimi ed i minimi della funzione*

$$F(x,y,z) = (x+2y+z)^2\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\Big\}.$$

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy}{(2+y^2)(x^2+y^2)}\ .$$

Calcolare $\limsup\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e* $\limsup\limits_{|(x,y)|\to+\infty} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^{n+1}y(x+y)}{(x^2+y^2)^n} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

dove $n \geq 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.*