Prova scritta – 7/6/2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con B_R indichiamo la palla di raggio $R > 0$ e centro $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$*

$$B_R = \Big\{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 < R^2\Big\}.$$

Consideriamo gli insiemi

(A) $\Omega_A = \Big\{[0,1] \times (1,3]\Big\} \cup \partial B_3$; (B) $\Omega_B = \Big\{[0,1] \times (1,3]\Big\} \cap B_3$;

(C) $\Omega_C = \Big\{[0,1] \times (1,3]\Big\} \cap \partial B_3$; (D) $\Omega_D = \Big\{[0,1] \times (1,3]\Big\} \cup \overline{B}_3$;

(E) $\Omega_E = \Big\{[0,1] \times (1,3]\Big\} \setminus B_3$; (F) $\Omega_F = \Big\{[0,1] \times (1,3]\Big\} \cap \overline{B}_3$.

Gli insiemi seguenti sono **chiusi** *:*

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = B_1 \cup \Big\{\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, y\Big) \ : \ -2 \le y \le 3\Big\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in $(0,0)$ la funzione*

$$\frac{e^x \cos y}{1 - \sin(xy)} =$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big((1-2t)e^t + e^{2t}, \ e^t - (1+3t)^2\Big)$ *e* $F(x,y) = (1-xy)e^{x+y}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{e^{xy}\cos y}{2-\cos x}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H =$ *La matrice H è:*

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^3)\,dx + (x + y\sin y)\,dy$ *e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le y - y^3\,,\ y \ge 0\Big\}$ *in senso antiorario.* *Calcolare* $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \Big((x^3-3y)\cos(\pi(x^2+y^2))\,,\,(x-y^3)\cos(2\pi(x^2+y^2))\Big)$. *Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R=1$, calcolare* $\displaystyle\iint_{B_R} \mathrm{div}F(x,y)\,dx\,dy =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = (y^2 - xy)e^x.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare i massimi ed i minimi della funzione*

$$F(x,y,z) = (x+2y+z)^2\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2 \le 1\Big\}.$$

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy}{(2+y^2)(x^2+y^2)}\ .$$

Calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e* $\displaystyle\limsup_{|(x,y)|\to+\infty} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^{n+1}y(x+y)}{(x^2+y^2)^n} \quad se\ (x,y) \ne (0,0),$$

dove $n \ge 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione F è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.*