Prova scritta – 13/9/2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con $B_R(a,b)$ indichiamo la palla di raggio $R > 0$ e centro (a,b) in $\mathbb{R}^2$*

$$B_R(a,b) = \Big\{(x,y) \ : \ (x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2\Big\}.$$

Consideriamo gli insiemi

(A) $\Omega_A = \overline{B}_2(0,0) \cap B_1(2,0)$;

(B) $\Omega_B = \overline{B}_2(0,0) \cup B_1(2,0)$;

(C) $\Omega_C = \overline{B}_2(0,0) \setminus \overline{B}_1(2,0)$;

(D) $\Omega_D = \overline{B}_2(0,0) \setminus B_1(2,0)$;

(E) $\Omega_E = \overline{B}_2(0,0) \cap \overline{B}_1(2,0)$;

(F) $\Omega_F = \overline{B}_2(0,0) \cup \overline{B}_1(2,0)$.

Gli insiemi seguenti sono **chiusi** *:* D, E, F

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, \ y \geq 0\Big\} \setminus \partial B_1(0,0)$$

$\partial D = \{(x,0) : x \geq 0\} \cup \{(0,y) : y \geq 0\} \cup \{(x,y) : x^2+y^2=1, \ x \geq 0, y \geq 0\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in $(0,0)$ la funzione*

$\dfrac{e^{x+xy}}{1+2y} = 1 + x - 2y + \dfrac{x^2}{2} + 4y^2 - xy + o(x^2+y^2)$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big((1-t)^3 - 1 \, , \ (1+t)^2 - 1\Big)$ *e* $F(x,y) = e^{x+y}\Big(\sin(3x) + \sin(2y)\Big)$.

$\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = (-3,2) \cdot (3,2) = -5$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione $F(x,y) = \dfrac{\sqrt{1+5xy}}{\cos(2x)\,\cos y}$ in $(0,0)$. Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H = \begin{pmatrix} 4 & 5/2 \\ 5/2 & 1 \end{pmatrix}$ *La matrice H è:* indefinita

---

Esercizio 6. *Sia $\alpha = (xe^x - y)\,dx + (xy^2 - ye^y)\,dy$ e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del dominio $\Omega = \{(x,y)\ : y \geq 0,\ 0 \leq x \leq y - y^3\}$ in senso antiorario.*

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha = 1/3$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left(\frac{9x+2y}{(1+x^2+y^2)^4}, \frac{x-y}{(3+x^2+y^2)^2}\right)$.

Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R=1$, calcolare $\displaystyle\iint_{B_R} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy = \pi/2$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione* Punti critici : $(0,1)$ e $(0,-1)$

$$F(x,y) = x^2y + y^3 - 3y + x^2.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

$(0,1)$ - minimo relativo ; $(0,-1)$ - hessiana semidefinita negativa.

Esercizio 9. *Trovare il massimo della funzione*

$$F(x,y,z) = 2z - \sqrt{2-xy},$$ max in $(0,0,\sqrt{2})$.

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2 \leq 2\Big\}.$$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{y\,\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2 + y^2},$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = 1/2$

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(x+y)^n x^{n+2} y^{n+3}}{(x^4+y^4)^n} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

dove $n \geq 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.* $\forall n \geq 1$

(2) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è continua in $(0,0)$.* $n < 5$

(3) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.* $n < 4$
