Prova scritta – Gennaio 2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con* B_R *indichiamo la palla di raggio* $R > 0$ *e centro* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$

$$B_R = \Big\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 < R^2\Big\}.$$

Consideriamo gli insiemi

$(A)\quad \Omega_A = \Big\{[0,1]\times[0,1]\Big\}\setminus B_1\ ;\qquad (B)\quad \Omega_B = \Big\{[0,1]\times[0,1]\Big\}\cap B_1\ ;$

$(C)\quad \Omega_C = \Big\{[0,1]\times[0,1]\Big\}\cup B_1\ ;\qquad (D)\quad \Omega_D = B_1\setminus\Big\{[0,1]\times[0,1]\Big\}\ ;$

$(E)\quad \Omega_E = \Big\{(0,1]\times(0,1]\Big\}\cup B_1\ ;\qquad (F)\quad \Omega_F = B_1\cap\Big\{(0,1]\times(0,1]\Big\}\ .$

Gli insiemi seguenti sono **aperti** :

Gli insiemi seguenti sono **chiusi** :

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = B_1\cap\Big\{(x,0)\ :\ -2\le x\le 2\Big\}\setminus\Big\{(0,y)\ :\ -2\le y\le 2\Big\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in zero la funzione* $\dfrac{e^{y+xy}}{1+x}$.

$\dfrac{e^{y+xy}}{1+x} =$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\sin(2t)e^{3t}\,,\ e^{4t}-\cos(2t)\Big)$ *e* $F(x,y) = (1-y)^2+(1+x)^3.$

$\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{(x-y)\sin(x-3y)}{\cos(x+y)}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H =$ *La matrice H è:*

Esercizio 6. *Calcolare l'integrale della funzione $F(x,y) = y$ su* $\Omega = B_2 \cap \Big\{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0\Big\}$.

$$\iint_\Omega F(x,y)\,dx\,dy =$$

Esercizio 7. *Consideriamo la forma* $\alpha = (x^2 e^{3x} - y^2)\,dx + \big(3x + y^2\big)\,dy$ *e la curva* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(\cos t,\, \sin t\big)$. *Calcolare* $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^3 + 3xy - y^3.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare i massimi ed i minimi della funzione*

$$F(x,y,z) = x^2 + 4y - 2z\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\Big\}.$$

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy\sqrt{x^2+y^2}}{y^2 + \big(x^2+y^2\big)^2}\ .$$

Calcolare $\limsup\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e* $\liminf\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e dire se esiste il limite* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x|y|^{1+a}}{x^2+y^2} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

dove $a \geq 0$ è un parametro reale.

(1) *Per quali valori del parametro $a \geq 0$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $a \geq 0$ la funzione F è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $a \geq 0$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.*
