Prova scritta – 3/6/2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con* B_R *indichiamo la palla di raggio* $R > 0$ *e centro* $(0, 0)$ *in* $\mathbb{R}^2$

$$B_R = \Big\{(x, y) \;:\; x^2 + y^2 < R^2\Big\}.$$

Consideriamo gli insiemi

(A) $\Omega_A = \Big\{[0,1] \times (1,2]\Big\} \setminus \overline{B}_2$; (B) $\Omega_B = \Big\{[0,1] \times (1,2]\Big\} \setminus B_2$;

(C) $\Omega_C = \Big\{[0,1] \times (1,2]\Big\} \cup \partial B_2$; (D) $\Omega_D = \Big\{[0,1] \times (1,2]\Big\} \cup \overline{B}_2$;

(E) $\Omega_E = \Big\{[0,1] \times (1,2]\Big\} \cup B_2$; (F) $\Omega_F = \Big\{[0,1] \times (1,2]\Big\} \cap \overline{B}_2$.

Gli insiemi seguenti sono **chiusi** *:*

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = B_1 \setminus \Big\{(x, 1/2) \;:\; -1 \leq x \leq 1\Big\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0, 0)$ *la funzione*

$$\frac{\cos(x-y)}{1-\sin(x+y)} =$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big((1+2t)e^{2t} - e^t\,,\; e^{4t} - (1+t)^2\Big)$ *e* $F(x, y) = (1 + xy)e^x$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y)=\dfrac{(1-\sin(xy))e^x}{\cos y}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H =$ *La matrice H è:*

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}y^2)\,dx + (x + y\sin y)\,dy$ *e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y - y^2\big\}$ *in senso antiorario.*
Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \Big((x-3y)\cos(\pi(x^2+y^2))\,,\,(x+4y)\cos(2\pi(x^2+y^2))\Big)$.
Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R=1$, calcolare $\displaystyle\iint_{B_R} \mathrm{div}F(x,y)\,dx\,dy =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = (x^2+xy)e^y.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare il massimo ed il minimo della funzione*

$$F(x,y,z) = x^2yz\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ :\ x^2+y^2+z^2 = 2\Big\}.$$

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy}{(1+x^2)(x^2+y^2)}\ .$$

Calcolare $\displaystyle\limsup_{|(x,y)|\to 0} F(x,y)$ *e* $\displaystyle\limsup_{|(x,y)|\to+\infty} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione* $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definita come*

$$F(0,0)=0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(x+y)^n x^2 y}{(x^2+y^2)^n} \quad se\ (x,y)\neq(0,0),$$

dove $n\ge 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n\ge1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $n\ge1$ la funzione F è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $n\ge1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.*
