Prova scritta – 22/7/2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con* $B_R(a,b)$ *indichiamo la palla di raggio* $R > 0$ *e centro* (a,b) *in* $\mathbb{R}^2$

$$B_R(a,b) = \Big\{(x,y) \ : \ (x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2\Big\}.$$

Consideriamo gli insiemi

(A) $\quad \Omega_A = \Big\{[0,2) \times [0,2)\Big\} \cap B_1(0,0)$;

(B) $\quad \Omega_B = \Big\{[0,2) \times [0,2)\Big\} \cap B_1(2,0)$;

(C) $\quad \Omega_C = \Big\{[0,2) \times [0,2)\Big\} \cap B_1(2,2)$;

(D) $\quad \Omega_D = \Big\{[0,2) \times [0,2)\Big\} \cap \overline{B}_1(0,0)$;

(E) $\quad \Omega_E = \Big\{[0,2) \times [0,2)\Big\} \cap \overline{B}_1(2,0)$;

(F) $\quad \Omega_F = \Big\{[0,2) \times [0,2)\Big\} \cap \overline{B}_1(2,2)$.

Gli insiemi seguenti sono **chiusi** *:*

Gli insiemi seguenti sono **aperti** *:*

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq 0\Big\} \setminus \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < 1 - x^2\Big\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{\sqrt{\cos(2x)}}{2 - e^{x+xy}} =$$

Esercizio 4. *Siano* $\quad \gamma(t) = \Big(e^{3t+t^2} - \cos(2t - t^3)\,,\ (1-t)\sin(2t)\Big)$ $\quad$ *e* $\quad F(x,y) = \dfrac{e^{2x-y}}{1 + (x+y)^2}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{\sin y + \cos x}{1 + x - y^2}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H =$ *La matrice H è:*

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (x^2 + xy)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *a tratti che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \big\{(x,y)\ : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1 - x^2\big\}$ *in senso antiorario.*
Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \Big((7x-2y)(1+x^2+y^2)^2\,,\ (3x-2y)(3+x^2+y^2)\Big)$.
Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R = 1$, calcolare $\displaystyle\iint_{B_R} \mathrm{div} F(x,y)\,dx\,dy =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = xy^2 + \frac{3}{2}x^2 + 3y^2.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare il massimo della funzione*

$$F(x,y,z) = (x+y)^2 + \frac{1}{2}z^4\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\Big\}.$$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{y}{\sin\big(x^2+y^2\big) + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\quad ,$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{xy^n(x-2y)^2}{(x^2+y^2)^n} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

dove $n \geq 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.*
