

---

**Prova scritta – 12/9/2022**

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

---

Nome:

---

Cognome:

---

**Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)**

**Esercizio 1.** Con  $B_R(a, b)$  indichiamo la palla di raggio  $R > 0$  e centro  $(a, b)$  in  $\mathbb{R}^2$

$$B_R(a, b) = \{(x, y) : (x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2\}.$$

Consideriamo gli insiemi

$$(A) \quad \Omega_A = B_2(0, 0) \cap B_1(2, 0); \quad (D) \quad \Omega_D = B_2(0, 0) \setminus B_1(2, 0);$$

$$(B) \quad \Omega_B = B_2(0, 0) \cup B_1(2, 0); \quad (E) \quad \Omega_E = B_2(0, 0) \cap \overline{B}_1(2, 0);$$

$$(C) \quad \Omega_C = B_2(0, 0) \cup \overline{B}_1(2, 0); \quad (F) \quad \Omega_F = B_2(0, 0) \setminus \overline{B}_1(2, 0).$$

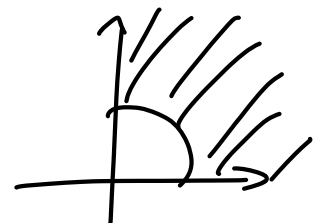

---

Gli insiemi seguenti sono aperti : **A, B, F**

---

**Esercizio 2.** Trovare la frontiera dell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq 0\} \setminus B_1(0, 0)$$



$$\partial D = \{(x, 0) : x \geq 1\} \cup \{(0, y) : y \geq 1\} \cup \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0\}$$


---

**Esercizio 3.** Sviluppare fino al secondo ordine in  $(0, 0)$  la funzione

$$\frac{e^{x+xy}}{1+y} = 1 + x - y + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + o(x^2 + y^2)$$


---

**Esercizio 4.** Siano  $\gamma(t) = \left( \frac{(1+t)^2}{(1+t)^2 + (1-t)^2}, \frac{(1-t)^2}{(1+t)^2 + (1-t)^2} \right)$  e  $F(x, y) = e^{x+y} (\sin(3x) + \sin(2y))$ .

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = \gamma'(0) \cdot \nabla F(0, 0) = (3, -2) \cdot (3, 2) = 5$$


---

**Esercizio 5.** Calcolare la matrice hessiana  $H$  della funzione  $F(x, y) = \frac{\sqrt{1+xy}}{\cos(2x)\cos y}$  in  $(0, 0)$ . Dire se  $H$  è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{La matrice } H \text{ è: } \textit{definita positiva}$$

**Esercizio 6.** Sia  $\alpha = (xe^x - y) dx + (xy^2 - ye^y) dy$  e sia  $\gamma$  la curva semplice chiusa e  $C^1$  a tratti che parametrizza il bordo del dominio  $\Omega = \{(x, y) : y \geq 0, 0 \leq x \leq y - y^3\}$  in senso antiorario.

Calcolare  $\int_{\gamma} \alpha = \frac{1}{3}$

**Esercizio 7.** Consideriamo il campo  $F(x, y) = \left( \frac{7x+2y}{(1+x^2+y^2)^4}, \frac{x-3y}{(3+x^2+y^2)^2} \right)$ .

Sulla palla  $B_R$  di centro  $(0, 0)$  e raggio  $R = 1$ , calcolare  $\iint_{B_R} \operatorname{div} F(x, y) dx dy = \frac{\pi}{4}$

## Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

**Esercizio 8.** Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = xy^2 + x^3 - 3x + y^2$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di  $F$  in  $\mathbb{R}^2$  e, studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

**Esercizio 9.** Trovare il massimo della funzione

$$F(x, y, z) = 2z + \sqrt{2 - xy},$$

sull'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}.$$

**Esercizio 10.** Data la funzione

$$F(x, y) = \frac{(y + 2y^3) \sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2 + y^2 \cos(x^2 + y^2)},$$

calcolare  $\limsup_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$ .

**Esercizio 11.** Consideriamo la funzione  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$F(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad F(x, y) = \frac{(x + y)^n x^{n+1} y^{n+2}}{(x^4 + y^4)^n} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0),$$

dove  $n \geq 1$  è un numero intero.

- (1) Per quali valori del parametro  $n \geq 1$  la funzione è derivabile in  $(0, 0)$ .
- (2) Per quali valori del parametro  $n \geq 1$  la funzione  $F$  è continua in  $(0, 0)$ .
- (3) Per quali valori del parametro  $n \geq 1$  la funzione  $F$  è differenziabile in  $(0, 0)$ .