1-forme chiuse in domini rettangolari

Teorema 1. *Consideriamo il rettangolo*

$$\mathcal{R} = (A_1, B_1) \times (A_2, B_2) \subset \mathbb{R}^2.$$

Se α è una 1-forma chiusa di classe C^1 su $\mathcal{R}$, allora α è anche esatta.

Dimostrazione: Consideriamo la 1-forma

$$\alpha := a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy,$$

e ricordiamo che

$$\alpha \text{ è chiusa } \Leftrightarrow \ d\alpha = 0 \ \Leftrightarrow \ \partial_y a = \partial_x b \text{ in } \mathcal{R}.$$

Fissiamo un punto $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ e per ogni $(x, y) \in \mathcal{R}$ definiamo la funzione

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} a(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} b(x,s)\,ds.$$

Allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\Big(F(x, y+k) - F(x,y)\Big) = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k} \int_{y}^{y+k} b(x,s)\,ds = b(x,y).$$

Inoltre, nella direzione x, abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\Big(F(x+h,y) - F(x,y)\Big) &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} a(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} b(x+h,s)\,ds\right) - \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x} a(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} b(x,s)\,ds\right)\\
&= \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} a(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h}\Big(b(x+h,s) - b(x,s)\Big)\,ds
\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(F(x+h,y) - F(x,y)\Big) &= a(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \partial_x b(x,s)\,ds \qquad \text{(abbiamo derivato sotto il segno dell'integrale)}\\
&= a(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \partial_y a(x,s)\,ds \qquad \text{(qui abbiamo usato che } \partial_y a = \partial_x b\text{)}\\
&= a(x,y_0) + \big(a(x,y) - a(x,y_0)\big) = a(x,y).
\end{aligned}$$

In conclusione, abbiamo dimostrato che F è derivabile in ogni punto di $\mathcal{R}$ e le sue derivate parziali sono:

$$\partial_x F(x,y) = a(x,y) \qquad \text{e} \qquad \partial_y F(x,y) = b(x,y).$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}
dF &= \partial_x F(x,y)\,dx + \partial_y F(x,y)\,dy \qquad \text{(per definizione della derivata esterna)}\\
&= a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy.
\end{aligned}$$

La forma α è quindi esatta. □