

## L'area del disco

**Proposizione 1.** *In dimensione 2, consideriamo la palla aperta e la palla chiusa di centro  $(0,0)$  e raggio  $R$ ,*

$$B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\};$$

$$\bar{B}_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Allora,  $\bar{B}_R$  e  $B_R$  sono misurabili e

$$|\bar{B}_R| = |B_R| = \pi R^2.$$

*Proof.* Osserviamo che possiamo scrivere  $\bar{B}_R$  come

$$\bar{B}_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -R \leq x \leq R, u(x) \leq y \leq v(x)\},$$

dove le funzioni

$$u : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad v : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$$

sono date da

$$u(x) = -\sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{e} \quad v(x) = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Siccome  $u$  e  $v$  sono continue su  $[-1, 1]$ , abbiamo che  $\bar{B}_R$  è un dominio normale. (Inoltre, possiamo anche osservare che siccome

$$u < v \quad \text{su} \quad (-1, 1),$$

$\bar{B}_R$  è anche semplice.) Ora, siccome  $\bar{B}_R$  è un dominio normale e siccome

$$B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -R < x < R, u(x) < y < v(x)\},$$

abbiamo che  $\bar{B}_R$  e  $B_R$  sono misurabili e

$$|\bar{B}_R| = |B_R|.$$

Per calcolare l'area di  $B_R$  e  $\bar{B}_R$ , usiamo la formula di Fubini:

$$|\bar{B}_R| = \iint_{\bar{B}_R} 1 \, dx \, dy = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 \, dy = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2} \, dx.$$

Ora, cambiando variabile,  $y = x/R$  (quindi  $x = Ry$ ), abbiamo

$$2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2} \, dx = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{R^2-R^2y^2} \, R \, dy = 2R^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} \, dy.$$

Ora consideriamo la nuova variabile

$$y = \sin \theta, \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Allora,  $dy = \cos \theta \, d\theta$  e

$$\begin{aligned} |\bar{B}_R| &= 2R^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} \, dy \\ &= 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta \, d\theta \\ &= 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \cos \theta \, d\theta \quad (\text{siccome } \theta \in [-\pi/2, \pi/2], \cos \theta > 0) \\ &= R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(2\theta) + 1) \, d\theta \\ &= R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \, d\theta = R^2 \pi. \end{aligned}$$

□