Domini normali

Domini normali in $\mathbb{R}^2$

Siano $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato e

$$u : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad v : [a, b] \to \mathbb{R},$$

due funzioni continue tali che:

$$u(x) \le v(x) \qquad \text{per ogni} \qquad x \in [a, b].$$

Definizione 1. Il **dominio normale** determinato dalle funzioni u e v è l'insieme chiuso e limitato

$$D = \Big\{(x, y) \ : \ x \in [a, b],\ u(x) \le y \le v(x)\Big\}.$$

Inoltre, se abbiamo che

$$u(x) < v(x) \qquad \text{per ogni} \qquad x \in (a, b),$$

diremo che il dominio D è un **dominio normale semplice** (determinato dalle funzioni u e v).
Diciamo che un dominio normale semplice è di classe C^1, se le funzioni u e v sono di classe C^1 su $[a, b]$.

La frontiera di un dominio normale semplice

Proposizione 2. *Siano $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato e*

$$u : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad e \qquad v : [a, b] \to \mathbb{R},$$

due funzioni continue tali che:

$$u(x) \le v(x) \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in [a, b].$$

Sia D il dominio normale determinato dalle funzioni u e v. Supponiamo che D sia semplice, ovvero

$$u(x) < v(x) \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in (a, b).$$

Allora, la frontiera di D è data da:

$$\begin{aligned}\partial D = \Big\{(x, v(x)) \ : \ x \in [a, b]\Big\} \qquad &(\textit{il grafico di } v)\\ \cup \Big\{(x, u(x)) \ : \ x \in [a, b]\Big\} \qquad &(\textit{il grafico di } u)\\ \cup \Big\{(a, y) \ : \ y \in [u(a), v(a)]\Big\} \qquad &(\textit{il lato verticale sinistro})\\ \cup \Big\{(b, y) \ : \ y \in [u(b), v(b)]\Big\} \qquad &(\textit{il lato verticale destro})\end{aligned}$$

Parte interna di un dominio normale semplice

Proposizione 3. *Siano $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato e*

$$u : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad e \qquad v : [a, b] \to \mathbb{R},$$

due funzioni continue tali che:

$$u(x) \le v(x) \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in [a, b].$$

Sia D il dominio normale determinato dalle funzioni u e v e sia Ω l'insieme

$$\Omega = \Big\{(x, y) \ : \ x \in (a, b),\ u(x) < y < v(x)\Big\}.$$

Supponiamo, inoltre, che D sia semplice, ovvero che vale la disuguaglianza

$$u(x) < v(x) \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in (a, b).$$

Allora:

(i) $\overline{\Omega} = D$;

(ii) Ω *è un aperto connesso per archi;*
(iii) Ω *è la parte interna di* D, $\mathrm{int}(D) = \Omega$*;*
(iv) *le frontiere di* Ω *e di* D *coincidono.*

Osservazione 4. *Sia* D *un dominio normale (determinato da due funzioni continue* $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$*) e sia*

$$\Omega = \Big\{(x, y) \ : \ x \in (a, b), \ u(x) < y < v(x)\Big\}.$$

È sempre vero che Ω *è la parte interna di* D*. D'altra parte, se* D *non è un dominio normale semplice, allora la chiusura di* Ω *potrebbe non coincidere con* D*; ed anche le frontiere* ∂D *e* $\partial\Omega$ *potrebbero essere diverse.*
Per esempio, se consideriamo l'intervallo $[-1, 1]$ *e le funzioni*

$$u : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad u(x) = 0 \ \ \textit{per ogni} \ \ x \ ;$$

$$v : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad v(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se} \ \ x \leq 0 \\ x & \textit{se} \ \ x \geq 0 \ ; \end{cases}$$

allora:

(a) *l'insieme aperto* Ω *è dato da*

$$\Omega = \Big\{(x, y) \ : \ 0 < x < 1, \ 0 < y < x\Big\}.$$

(b) *la chiusura* $\overline{\Omega}$ *è data da*

$$\overline{\Omega} = \Big\{(x, y) \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x\Big\}.$$

(c) *la frontiera* $\partial\Omega$ *è data da*

$$\partial\Omega = \Big\{(x, 0) \ : \ 0 \leq x \leq 1\Big\} \cup \Big\{(0, y) \ : \ 0 \leq y \leq 1\Big\} \cup \Big\{(x, x) \ : \ 0 \leq x \leq 1\Big\}.$$

(d) *il dominio normale* D *è dato da*

$$D = \Big\{(x, y) \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x\Big\} \bigcup \Big\{(x, y) \ : \ -1 \leq x \leq 0, \ y = 0\Big\}.$$

(e) *la frontiera* ∂D *è data da*

$$\partial D = \partial\Omega \cup \Big\{(x, 0) \ : \ -1 \leq x \leq 0\Big\}.$$