Formula di Fubini

Teorema 1 (Formula di Fubini)**.** *Sia $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ un rettangolo in $\mathbb{R}^2$.*
Sia $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e tale che:

(a) *F è integrabile su $\mathcal{R}$;*

(b) *per ogni fissato $x \in [a, b]$, la funzione*
$$y \mapsto F(x, y)$$
è integrabile sull'intervallo $[c, d]$;

(c) *La funzione*
$$I : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad I(x) = \int_c^d F(x, y)\, dy$$
è integrabile su $[a, b]$.

Allora
$$\iint_{\mathcal{R}} F(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d F(x, y)\, dy \right) dx.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome $\varepsilon > 0$ e siccome F è integrabile su Ω, possiamo trovare

una partizione $\mathcal{Q}$, generata da una partizione $\mathcal{Q}_{[a,b]}$ di $[a, b]$ e una partizione $\mathcal{Q}_{[c,d]}$ di $[c, d]$,

tale che
$$\left(\sum_{R \in \mathcal{Q}} \sup_R F \right) - \left(\sum_{R \in \mathcal{Q}} \inf_R F \right) \le \varepsilon.$$
Siccome $\mathcal{I} : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile, possiamo trovare una partizione dell'intervallo $[a, b]$,
$$\mathcal{P}_{[a,b]} := \big\{ a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_M = b \big\},$$
tale che
$$\mathcal{P}_{[a,b]} \text{ sia più fine di } \mathcal{Q}_{[a,b]}$$
e tale che
$$\left(\sum_{j=0}^{M-1} \big(t_{j+1} - t_j\big) \sup_{x \in [t_j, t_{j+1}]} I(x) \right) - \left(\sum_{j=0}^{M-1} \big(t_{j+1} - t_j\big) \inf_{x \in [t_j, t_{j+1}]} I(x) \right) \le \varepsilon.$$
Ora, siccome abbiamo
$$\sum_{j=0}^{M-1} \left(\big(t_{j+1} - t_j\big) \inf_{x \in [t_j, t_{j+1}]} I(x) \right) \;\le\; \int_a^b I(x)\, dx \;\le\; \sum_{j=0}^{M-1} \left(\big(t_{j+1} - t_j\big) \sup_{x \in [t_j, t_{j+1}]} I(x) \right),$$
$$\sum_{j=0}^{M-1} \left(\big(t_{j+1} - t_j\big) \inf_{x \in [t_j, t_{j+1}]} I(x) \right) \;\le\; \sum_{j=0}^{M-1} \big(t_{j+1} - t_j\big) I(t_j) \;\le\; \sum_{j=0}^{M-1} \left(\big(t_{j+1} - t_j\big) \sup_{x \in [t_j, t_{j+1}]} I(x) \right),$$
possiamo dedurre che
$$\left| \int_a^b I(x)\, dx - \sum_{j=0}^{M-1} \big(t_{j+1} - t_j\big) I(t_j) \right| \le \varepsilon.$$
Sia ora
$$j \in \{0, \dots, M-1\}.$$
Siccome la funzione
$$y \mapsto F(t_j, y).$$
è integrabile su $[c, d]$ e siccome
$$I(t_j) = \int_c^d F(t_j, y)\, dy,$$

possiamo trovare una partizione

$$\mathcal{P}_{[c,d]} := \big\{c = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_N = d\big\},$$

tale che

$$\mathcal{P}_{[c,d} \text{ sia più fine di } \mathcal{Q}_{[c,d]}$$

e tale che **la disuguaglianza**

$$\left(\sum_{i=0}^{N-1} \big(s_{i+1} - s_i\big) \sup_{y \in [s_i, s_{i+1}]} F(t_j, y)\right) - \left(\sum_{i=0}^{N-1} \big(s_{i+1} - s_i\big) \inf_{y \in [s_i, s_{i+1}]} F(t_j, y)\right) \le \varepsilon,$$

vale per ogni $j = 0, \ldots, M-1$**.**

Ora, ragionando come sopra, abbiamo che per ogni $j = 0, \ldots, M-1$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left(\big(s_{i+1} - s_i\big) \inf_{y \in [s_i, s_{i+1}]} F(t_j, y)\right) \;\le\; I(t_j) = \int_c^d F(t_j, y)\,dy \;\le\; \sum_{i=0}^{N-1} \left(\big(s_{i+1} - s_i\big) \sup_{y \in [s_i, s_{i+1}]} F(t_j, y)\right),$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left(\big(s_{i+1} - s_i\big) \inf_{y \in [s_i, s_{i+1}]} F(t_j, y)\right) \;\le\; \sum_{i=0}^{N-1} \big(s_{i+1} - s_i\big) F(t_j, s_i) \;\le\; \sum_{i=0}^{N-1} \left(\big(s_{i+1} - s_i\big) \sup_{y \in [s_i, s_{i+1}]} F(t_j, y)\right).$$

Di conseguenza,

$$\left| I(t_j) - \sum_{i=0}^{N-1} \big(s_{i+1} - s_i\big) F(t_j, s_i) \right| \le \varepsilon \qquad \text{per ogni} \qquad j = 0, \ldots, M-1,$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b I(x)\,dx - \sum_{j=0}^{M-1} \big(t_{j+1} - t_j\big) \sum_{i=0}^{N-1} \big(s_{i+1} - s_i\big) F(t_j, s_i) \right| &\le \left| \int_a^b I(x)\,dx - \sum_{j=0}^{M-1} \big(t_{j+1} - t_j\big) I(t_j) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{j=0}^{M-1} \big(t_{j+1} - t_j\big) \left(I(t_j) - \sum_{i=0}^{N-1} \big(s_{i+1} - s_i\big) F(t_j, s_i) \right) \right| \\
&\le \varepsilon + \sum_{j=0}^{M-1} \big(t_{j+1} - t_j\big)\varepsilon = \varepsilon(1 + d - c),
\end{aligned}$$

In conclusione,

$$\left| \int_a^b I(x)\,dx - \sum_{j=0}^{M-1} \big(t_{j+1} - t_j\big) \sum_{i=0}^{N-1} \big(s_{i+1} - s_i\big) F(t_j, s_i) \right| \le \varepsilon(1 + d - c). \tag{1}$$

Consideriamo ora

la partizione $\mathcal{P}$, generata dalle partizioni $\mathcal{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{P}_{[c,d]}$ definite sopra.

Siccome, per costruzione,

$$\mathcal{P}_{[a,b]} \text{ è più fine di } \mathcal{Q}_{[a,b]} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{P}_{[c,d]} \text{ è più fine di } \mathcal{Q}_{[c,d]},$$

abbiamo anche che

$$\mathcal{P} \text{ è più fine di } \mathcal{Q}.$$

Di conseguenza,

$$\left(\sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} \sup_{R_{ij}} F\right) - \left(\sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} \inf_{R_{ij}} F\right) \le \varepsilon.$$

ora, siccome

$$\left(\sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} \inf_{R_{ij}} F\right) \le \iint_R F(x, y)\,dx\,dy \le \left(\sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} \sup_{R_{ij}} F\right),$$

$$\left(\sum_{R_{ij}\in\mathcal{P}} \inf_{R_{ij}} F\right) \le \sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1} \big(t_{j+1}-t_j\big)\big(s_{i+1}-s_i\big)F(t_j,s_i) \le \left(\sum_{R_{ij}\in\mathcal{P}} \sup_{R_{ij}} F\right),$$

abbiamo che

$$\left|\iint_R F(x,y)\,dx\,dy - \sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1} \big(t_{j+1}-t_j\big)\big(s_{i+1}-s_i\big)F(t_j,s_i)\right| \le \varepsilon. \tag{2}$$

Ora, mettendo insieme (1) e (2), otteniamo

$$\left|\iint_R F(x,y)\,dx\,dy - \int_a^b I(x)\,dx\right| \le (2+d-c)\varepsilon.$$

Siccome ε è arbitrario, abbiamo la tesi. □

Corollario 2. *Siano* $\mathcal{R}=[a,b]\times[c,d]$ *un rettangolo in* $\mathbb{R}^2$ *ed* $F:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora*

$$\iint_{\mathcal{R}} F(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b F(x,y)\,dx\right) dy.$$

Corollario 3. *Siano*

$$u:[a,b]\to\mathbb{R} \qquad e \qquad v:[a,b]\to\mathbb{R}$$

due funzioni continue su $[a,b]$ *tali che*

$$u(x)\le v(x) \quad \text{per ogni} \quad x\in[a,b].$$

Sia D *il dominio normale determinato da* u *e* v*,*

$$D=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ a\le x\le b,\ u(x)\le y\le v(x)\Big\}.$$

Sia $F:D\to\mathbb{R}$ *una funzione continua su* D*. Allora*

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} F(x,y)\,dy\right) dx.$$