

## Integrazione di 1-forme sul bordo di un dominio normale

Sia  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervallo chiuso e limitato e siano

$$u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

due funzioni di classe  $C^1$  su  $[a, b]$  tali che:

$$u(x) < v(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in (a, b).$$

Consideriamo il dominio normale semplice

$$D = \{(x, y) : x \in [a, b], u(x) \leq y \leq v(x)\}.$$

Sia  $\gamma$  la curva semplice chiusa che parametrizza il bordo  $\partial D$  in senso antiorario.

Date due funzione continue

$$F : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad G : D \rightarrow \mathbb{R},$$

consideriamo la 1-forma

$$\alpha = F(x, y) dx + G(x, y) dy.$$

Allora,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \alpha &= \int_a^b \left( F(x, u(x)) + u'(x)G(x, u(x)) \right) dx \\ &\quad + \int_{u(b)}^{v(b)} G(b, y) dy \\ &\quad - \int_a^b \left( F(x, v(x)) + v'(x)G(x, v(x)) \right) dx \\ &\quad - \int_{u(a)}^{v(a)} G(a, y) dy. \end{aligned}$$

In particolare,

$$\int_{\gamma} F(x, y) dy = \int_a^b F(x, u(x)) dx - \int_a^b F(x, v(x)) dx.$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F(x, y) dx &= \int_a^b u'(x)G(x, u(x)) dx \\ &\quad + \int_{u(b)}^{v(b)} G(b, y) dy \\ &\quad - \int_a^b v'(x)G(x, v(x)) dx \\ &\quad - \int_{u(a)}^{v(a)} G(a, y) dy. \end{aligned}$$