

Formule di Gauss-Green

Lemma 1. Siano $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni di classe $C^1([a, b])$ e tali che

$$u(x) < v(x) \quad \text{per ogni } x \in (a, b).$$

Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 . Allora, la funzione

$$(a, b) \ni x \rightarrow \int_{u(x)}^{v(x)} F(x, y) dy$$

è derivabile in (a, b) e la sua derivata è :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{u(x)}^{v(x)} F(x, y) dy = v'(x) F(x, v(x)) - u'(x) F(x, u(x)) + \int_{u(x)}^{v(x)} \partial_x F(x, y) dy.$$

Dimostrazione. Sia $x \in (a, b)$. Per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $x + h \in (a, b)$, calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{u(x+h)}^{v(x+h)} F(x+h, y) dy - \int_{u(x)}^{v(x)} F(x, y) dy &= \int_{v(x)}^{v(x+h)} F(x+h, y) dy \\ &\quad - \int_{u(x)}^{u(x+h)} F(x+h, y) dy \\ &\quad + \int_{u(x)}^{v(x)} (F(x+h, y) - F(x, y)) dy. \end{aligned}$$

Per il teorema della media integrale abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{v(x)}^{v(x+h)} F(x+h, y) dy &= (v(x+h) - v(x)) F(x+h, v(x) + \kappa_v) \\ \int_{u(x)}^{u(x+h)} F(x+h, y) dy &= (u(x+h) - u(x)) F(x+h, u(x) + \kappa_u) \end{aligned}$$

dove le funzioni

$$\kappa_v = \kappa_v(x, h) \quad \text{e} \quad \kappa_u = \kappa_u(x, h)$$

sono tali che

$$|\kappa_v(x, h)| \leq |v(x+h) - v(x)| \quad \text{e} \quad |\kappa_u(x, h)| \leq |u(x+h) - u(x)|.$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left(\int_{u(x+h)}^{v(x+h)} F(x+h, y) dy - \int_{u(x)}^{v(x)} F(x, y) dy \right) &= \frac{1}{h} (v(x+h) - v(x)) F(x+h, v(x) + \kappa_v) \\ &\quad - \frac{1}{h} (u(x+h) - u(x)) F(x+h, u(x) + \kappa_u) \\ &\quad + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{1}{h} (F(x+h, y) - F(x, y)) dy \end{aligned}$$

e passando al limite per $h \rightarrow 0$, otteniamo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (v(x+h) - v(x)) F(x+h, v(x) + \kappa_v) = v'(x) F(x, v(x)),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (u(x+h) - u(x)) F(x+h, u(x) + \kappa_u) = u'(x) F(x, u(x)).$$

Usando invece il teorema di Lagrange, abbiamo che per ogni (x, y, h) esiste

$$w = w(x, y, h) \in \mathbb{R}, \quad |w(x, y, h)| \leq |h|$$

tale che

$$\frac{1}{h} (F(x+h, y) - F(x, y)) = \partial_x F(x+w, y).$$

Di conseguenza,

$$\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{1}{h} \left(F(x+h, y) - F(x, y) \right) dy = \int_{u(x)}^{v(x)} \partial_x F(x+w(x, y, h), y) dy$$

Usando l'uniforme continuità di $\partial_x F$ su

$$D = \left\{ (x, y) : x \in [a, b], u(x) \leq y \leq v(x) \right\},$$

otteniamo che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{1}{h} \left(F(x+h, y) - F(x, y) \right) dy = \int_{u(x)}^{v(x)} \partial_x F(x, y) dy.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{u(x+h)}^{v(x+h)} F(x+h, y) dy - \int_{u(x)}^{v(x)} F(x, y) dy \right) = v'(x) F(x, v(x)) - u'(x) F(x, u(x)) + \int_{u(x)}^{v(x)} \partial_x F(x, y) dy,$$

ovvero la funzione

$$x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} F(x, y) dy,$$

definita per $x \in [a, b]$, è integrabile sull'intervallo aperto (a, b) e la sua derivata è data da

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{u(x)}^{v(x)} F(x, y) dy = v'(x) F(x, v(x)) - u'(x) F(x, u(x)) + \int_{u(x)}^{v(x)} \partial_x F(x, y) dy. \quad \square$$

Teorema 2 (Formule di Gauss-Green). *Siano*

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

due funzioni di classe C^1 su $[a, b]$ tali che

$$u(x) < v(x) \quad \text{per ogni } x \in (a, b).$$

Sia D il dominio normale semplice determinato dalle funzioni u e v

$$D = \left\{ (x, y) : x \in [a, b], u(x) \leq y \leq v(x) \right\}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \iint_D \partial_y F(x, y) dx dy &= \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \partial_y F(x, y) dy dx = \int_a^b \left(F(x, v(x)) - F(x, u(x)) \right) dx ; \\ \iint_D \partial_x F(x, y) dx dy &= \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \partial_x F(x, y) dy dx = \int_a^b u'(x) F(x, u(x)) dx - \int_a^b v'(x) F(x, v(x)) dx \\ &\quad + \int_{u(b)}^{v(b)} F(b, y) dy - \int_{u(a)}^{v(a)} F(a, y) dy. \end{aligned}$$

Inoltre, le formule di Gauss-Green si possono scrivere anche come

$$\iint_D \partial_x F(x, y) dy dx = \int_{\gamma} F(x, y) dy \quad e \quad \iint_D \partial_y F(x, y) dy dx = - \int_{\gamma} F(x, y) dx,$$

dove γ è la curva semplice chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo ∂D in senso antiorario.