# Prova scritta – 10/1/2023

**Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...**

**Nome:**

**Cognome:**

## Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

**Esercizio 1.** *Consideriamo gli insiemi*

$(A)$ $\Omega_A = \Big([0,3]\times[-2,2]\Big)\cap\Big([1,4]\times[-1,1]\Big)$ ; $(D)$ $\Omega_D = \Big([0,3]\times[-2,2]\Big)\setminus\Big([1,4]\times[-1,1]\Big)$ ;

$(B)$ $\Omega_B = \Big([0,3]\times[-2,2]\Big)\cup\Big([1,4]\times[-1,1]\Big)$ ; $(E)$ $\Omega_E = \Big([0,3]\times[-2,2]\Big)\setminus\Big([1,4)\times(-1,1)\Big)$ ;

$(C)$ $\Omega_C = \Big([0,3]\times[-2,2]\Big)\setminus\Big([1,4]\times(-1,1)\Big)$ ; $(F)$ $\Omega_F = \Big([0,3]\times[-2,2]\Big)\setminus\Big((1,4]\times(-1,1)\Big)$ .

*Gli insiemi seguenti sono* **compatti** *:* A, B, F

**Esercizio 2.** *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ :\ x+y\geq 1\Big\}\cap\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ :\ x^2+y^2\leq 1\Big\}$$

$\partial D = \left\{(x,1-x) : 0\leq x\leq 1\right\} \cup \left\{(\cos\theta, \sin\theta) \ :\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right\}$

**Esercizio 3.** *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$\dfrac{e^x\cos y}{\sqrt{1+xy}} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}xy + o(x^2+y^2)$

**Esercizio 4.** *Siano* $\gamma(t) = \Big(e^t\sin(2t)\,,\ (\cos t)^3\sin(3t)\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{\sin(3x+2y)+\sin(2x-3y)}{1+2xy}$.

$\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = 7$

**Esercizio 5.** *Calcolare la matrice hessiana $H$ della funzione* $F(x,y) = \dfrac{1+\sin(xy)}{(1+x)(1-2y)}$ *in* $(0,0)$*. Dire se $H$ è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$ *La matrice $H$ è:* definita positiva

---

**Esercizio 6.** *Sia* $\alpha = (x^3 - y^3 + x)\,dx + (2x^3 + 3xy^2 - y)\,dy$ *e sia* $\gamma$ *la curva semplice chiusa e* $C^1$ *che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ *in senso antiorario.*
*Calcolare* $\displaystyle\int_\gamma \alpha = 3\pi$

---

**Esercizio 7.** *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left((3x-2y)\cos\left(\pi(x^2+y^2)\right),\, \dfrac{2x+3y}{1+x^2+y^2}\right)$.
*Sulla palla* $B_R$ *di centro* $(0,0)$ *e raggio* $R = \sqrt{2}$*, calcolare* $\displaystyle\iint_{B_R} \mathrm{div}F(x,y)\,dx\,dy = 8\pi$

---

## Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

---

**Esercizio 8.** *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{1}{3}y^3 + x^2y + xy.$$

*Trovare i punti critici di $F$ in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

---

**Esercizio 9.** *Trovare il massimo della funzione*

$$F(x,y,z) = x + y + z\,,$$

*sull'insieme*

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + (x-y)^2 + z^2 \leq 1\Big\}.$$

---

**Esercizio 10.** *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2 + (x^2+y^2)^3}\quad,$$

*calcolare* $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ .

---

**Esercizio 11.** *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(x-2y)^{2n}x^{2n+1}y^{n+3}}{(x^6+y^6)^n} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

*dove $n \geq 1$ è un numero intero.*

(1) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione $F$ è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione $F$ è differenziabile in $(0,0)$.*

---

Es. 9: $F(x,y) = \frac{1}{3}y^3 + x^2 y + xy$

Cerchiamo i punti critici, soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \partial_x F = 0 \\ \partial_y F = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xy + y = 0 \\ y^2 + x^2 + x = 0 \end{cases}.$$

Le soluzioni sono:

$$(0,0)\ ;\ (-1,0)\ ;\ (-1/2, 1/2)\ ;\ (-1/2, -1/2).$$

Calcoliamo la matrice hessiana

$$D^2 F(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} F & \partial_{xy} F \\ \partial_{yx} F & \partial_{yy} F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x+1 \\ 2x+1 & 2y \end{pmatrix}.$$

(1) $D^2 F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$

quindi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è indefinita e $(0,0)$ è un punto di sella.

(2) $D^2 F(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$

quindi $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è indefinita e $(-1,0)$ è un punto di sella.

(3) $D^2 F(-1/2, 1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$ e $\operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 > 0.$

Quindi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è definita positiva e $(-1/2, 1/2)$ è un punto di minimo relativo.

(4) $D^2F(-1/2, -1/2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 > 0$ e $\operatorname{tr}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 < 0$.

Quindi $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ è definita negativa e

$(-1/2, -1/2)$ è un punto di massimo relativo.

---

**Es. 9**

$$F(x,y,z) = x + y + z\,,$$

$$D = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + (x-y)^2 + z^2 \leq 1 \Big\}.$$

D è un compatto (chiuso e limitato). Quindi, per il teorema di Weierstrass F ha un massimo in D.

Osserviamo che siccome $DF = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la funzione F non ha punti critici nella parte interna

$$\operatorname{int}(D) = \{ (x,y,z) \ : \ x^2 + (x-y)^2 + z^2 < 1 \}.$$

Di conseguenza, il massimo di D è raggiunto sul bordo

$$\partial D = \{ (x,y,z) : x^2 + (x-y)^2 + z^2 = 1 \}.$$

Consideriamo la funzione

$$G(x,y,z) = x^2 + (x-y)^2 + z^2 - 1.$$

Allora $\partial D = \{ (x,y,z) \; : \; G(x,y,z) = 0 \}$.

Studiamo il gradiente di $G$:

$$\partial_x G = 2x$$

$$\partial_y G = 2(y-x)$$

$$\partial_z G = 2z$$

L'unica soluzione del sistema $\begin{cases} \partial_x G = 0 \\ \partial_y G = 0 \\ \partial_z G = 0 \end{cases}$

è il punto $(0,0,0)$ che <u>non</u> appartiene a $\partial D$.

Quindi:

$$\nabla G \neq 0 \quad \text{su} \quad \partial D,$$

e di conseguenza possiamo applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Un punto di massimo $(x,y,z)$ di $F$ su $\partial D$ è necessariamente soluzione del sistema

$$\begin{cases} \partial_x F = \lambda \partial_x G \\ \partial_y F = \lambda \partial_y G \\ \partial_z F = \lambda \partial_z G \\ G = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = 2\lambda x + 2\lambda(x-y) \\ 1 = 2\lambda(y-x) \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + (y-x)^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Siccome $2\lambda z = 1$, abbiamo che $\lambda \neq 0$. Quindi abbiamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y = \frac{1}{2\lambda} \\ y - x = \frac{1}{2\lambda} \\ z = \frac{1}{2\lambda} \\ x^2 + (y-x)^2 + z^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - \left(x + \frac{1}{2\lambda}\right) = \frac{1}{2\lambda} \\ y = x + \frac{1}{2\lambda} \\ z = \frac{1}{2\lambda} \\ x^2 + (y-x)^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{2}{2\lambda} \\ y = \frac{3}{2\lambda} \\ z = \frac{1}{2\lambda} \\ \left(\frac{2}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2\lambda)^2 = 6 \Rightarrow 2\lambda = \pm\sqrt{6}$$

Quindi le soluzioni sono:

(1) $(x, y, z, \lambda) = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

nel quale $F\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \sqrt{6}$

(2) $(x, y, z, \lambda) = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

dove $F\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\sqrt{6}$.

Quindi: il massimo di $F$ su $D$ è $\sqrt{6}$ ed è raggiunto nel punto $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

---

**Es. 10:**

$$F(x,y) = \frac{xy^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+(x^2+y^2)^3} \quad ,$$

In coordinate polari

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{(r\cos\theta)\cdot(r\sin\theta)^2\cdot r}{(r\cos\theta)^2 + r^6}$$

$$= \frac{r^2\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^4} .$$

Siccome

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{r\to 0}\left\{\sup_{\theta} F(r\cos\theta, r\sin\theta)\right\},$$

fissiamo $r>0$ e calcoliamo

$$\sup_{\theta} F(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Cerchiamo quindi i punti critici della funzione $\theta \longmapsto F(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

$$\partial_\theta F = 0 \iff$$

$$(-\sin^3\theta + 2\cos^2\theta \sin\theta)(\cos^2\theta + r^4)$$
$$- \cos\theta \sin^2\theta \cdot (-2\sin\theta\cos\theta) = 0$$

$$\iff (-\sin^3\theta + 2\cos^2\theta \sin\theta)(\cos^2\theta + r^4)$$
$$+ 2\cos^2\theta \sin^3\theta = 0$$

$$\iff \sin\theta \left[(-\sin^2\theta + 2\cos^2\theta)(\cos^2\theta + r^4) + 2\cos^2\theta \sin^2\theta\right] = 0$$

Quindi, abbiamo due casi:

(1) $\sin\theta = 0$. In questo caso

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(r\cos\theta, 0) = 0.$$

Siccome $\theta \mapsto F(r\cos\theta, r\sin\theta)$

assume anche valori positivi, abbiamo che i punti critici, soluzioni di $\sin\theta = 0$, <u>non</u> sono punti di massimo.

(2) $(-\sin^2\theta + 2\cos^2\theta)(\cos^2\theta + r^4) + 2\cos^2\theta \sin^2\theta = 0$

Siccome $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, abbiamo

$$\left(3\cos^2\theta - 1\right)\left(\cos^2\theta + z^4\right) + 2\cos^2\theta\left(1 - \cos^2\theta\right) = 0$$

$$\iff \cos^4\theta + \cos^2\theta\left(1 + 3z^4\right) - z^4 = 0$$

Poniamo $X = \cos^2\theta$. Quindi cerchiamo le soluzioni dell'equazione

$$X^2 + X\left(1 + 3z^4\right) - z^4 = 0$$

nell'intervallo $[0,1]$.

$$X_{1,2} = \frac{-\left(1+3z^4\right) \pm \sqrt{\left(1+3z^4\right)^2 + 4z^4}}{2}$$

$$X_1 = \frac{-\left(1+3z^4\right) + \sqrt{1 + 10z^4 + 9z^8}}{2}$$

$$X_2 = \frac{-\left(1+3z^4\right) - \sqrt{1 + 10z^4 + 9z^8}}{2}$$

Siccome $X_2 < 0$, l'unica soluzione in $[0,1]$ è

$$X(z) = \frac{-\left(1+3z^4\right) + \sqrt{1 + 10z^4 + 9z^8}}{2}.$$

Quindi, abbiamo che

$$\cos\theta = \pm\sqrt{X(r)}$$

mentre

$$\sin^2\theta = 1 - X(r).$$

Quindi,

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\pm r^2\sqrt{X(r)}\,(1-X(r))}{X(r) + r^4}.$$

Siccome cerchiamo il massimo di $F$, scegliamo il valore positivo:

$$\max_{\theta} F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\sqrt{X(r)}\,(1-X(r))}{X(r)+r^4}.$$

Quindi

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\sqrt{X(r)}\,(1-X(r))}{X(r)+r^4}.$$

<u>Sviluppiamo $X(r)$.</u>

Siccome $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t)$,

abbiamo che

$$\sqrt{1+10r^4+9r^8} = 1 + 5r^4 + o(r^4).$$

Quindi:

$$X(z) = \frac{-(1+3z^4) + (1+5z^4+o(z^4))}{2}$$

$$= z^4 + o(z^4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - X(z) = 1 - z^4 + o(z^4) \\ \sqrt{X(z)} = z^2 + o(z^2) \end{cases}$$

osserviamo che:

$$\sqrt{z^4 + o(z^4)} = \sqrt{z^4(1+o(1))}$$

$$= z^2\sqrt{1+o(1)}$$

$$= z^2(1+o(1)) = z^2 + o(z^2)$$

Quindi

$$\frac{z^2\sqrt{X(z)}\,(1-X(z))}{X(z)+z^4} = \frac{z^2(z^2+o(z^2))(1+o(z^2))}{z^4+o(z^4)+z^4}$$

$$= \frac{\cancel{z^4}(1+o(1))(1+o(1))}{2\cancel{z^4}(1+o(1))}.$$

$$= \frac{1}{2} + o(1).$$

Quindi,

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{\tau\to 0} \frac{\tau^2\sqrt{X(\tau)}\,(1-X(\tau))}{X(\tau)+\tau^4} = \frac{1}{2}.$$