Prova scritta – 31/1/2023

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

(A) $\Omega_A = \overline{B}_1 \cap \Big\{x + y \geq 1\Big\}$; (D) $\Omega_D = \overline{B}_1 \cup \Big\{x + y > 1\Big\}$;

(B) $\Omega_B = \overline{B}_1 \setminus \Big\{x + y > 1\Big\}$; (E) $\Omega_E = \overline{B}_1 \cap \Big\{x + y > 1\Big\}$;

(C) $\Omega_C = \overline{B}_1 \setminus \Big\{x + y \geq 1\Big\}$; (F) $\Omega_F = \overline{B}_1 \cup \Big\{x + y \geq 1\Big\}$.

Gli insiemi seguenti sono **chiusi** *:* A, B, F

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < 0\Big\} \cap \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 3 - y^2\Big\}$$

$\partial D =$ $\{(0,y) : |y| \geq \sqrt{3}\} \cup \{(3-y^2, y) : |y| \geq \sqrt{3}\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0, 0)$ *la funzione*

$$\frac{e^{x-y}}{\sqrt{\cos y}} = 1 + x - y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}y^2 - xy + o(x^2+y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \left(\sqrt{1 - 6t}\,\sin(3t)\,,\ \dfrac{1 + t + t^3}{(1 + t)^2} - 1\right)$ *e* $F(x, y) = \dfrac{(1 + x)\ln(1 + y)}{1 + 7x^2 - 3xy}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = \gamma'(0) \cdot \nabla F(\gamma(0)) = (3, -1) \cdot (0, 1) = -1$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{\cos(x+2y)+3xy}{1+y}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$ *La matrice H è:* definita negativa

---

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (\sin x + yx^2)\,dx + (x - xy^2)\,dy$ *e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \{(x,y) \,:\, x^2+y^2 \le 3\}$ *in senso antiorario.*

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \int_\Omega (-x^2-y^2+1)\,dx\,dy = -\frac{3\pi}{2}$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left(\dfrac{2x-y}{1+x^2+y^2}\,,\,\dfrac{x+3y}{(1+x^2+y^2)^2}\right)$.

Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R=1$, calcolare $\displaystyle\iint_{B_R} \mathrm{div}F(x,y)\,dx\,dy = \frac{7\pi}{4}$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^3 - xy^2 + y^2 - x.$$

Trovare i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare l'estremo superiore della funzione*

$$F(x,y,z) = x + 2y + 3z^2\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + 3z^2 + (y-x)^2 \le 5\Big\}.$$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy}{5x^2+y^2+xy^2}\quad,$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(x-y)^n xy^4}{(x^2+y^2)^n} \quad se\ (x,y) \ne (0,0),$$

dove $n \ge 1$ è un numero intero. Per quali valori di $n \ge 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$?
