Prova scritta – 6/6/2023

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

$(A)\ \Omega_A = \Big((-1,1)\times(-1,1)\Big)\setminus B_1(1,1)$; $(D)\ \Omega_D = \Big([-1,1]\times[-1,1]\Big)\setminus B_1(1,1)$;

$(B)\ \Omega_B = \Big((-1,1)\times(-1,1)\Big)\cap B_1(1,1)$; $(E)\ \Omega_E = \Big([-1,1]\times[-1,1]\Big)\cup B_1(1,1)$;

$(C)\ \Omega_C = \Big((-1,1)\times(-1,1)\Big)\cup B_1(1,1)$; $(F)\ \Omega_F = \Big([-1,1]\times[-1,1]\Big)\cap B_1(1,1)$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti:**

Gli insiemi seguenti sono **aperti:**

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti:**

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \quad x^2+2<y<3x\Big\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$\dfrac{e^{x+xy}}{\cos y} =$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\sqrt{1+\sin(3t)}-1\,,\ \ln\big(1-\sin(t+t^2)\big)\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{2x-y}{\sqrt{1+xy}}$.

$\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$

Esercizio 5. *Calcolare, al variare del parametro* $A \in \mathbb{R}$, *la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{e^{xy} + \cos(Ax)}{\sqrt{1+Ay}}$ *nel punto* $(0,0)$.

$H =$ *Per quali valori di* A *la matrice* H *è* **indefinita**?

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (x^3 + 2y)\,dx + (y^3 + x)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x^2 - x \le y \le x\Big\}$ *in senso antiorario. Calcolare, in funzione del raggio* $R > 0$, *l'integrale* $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left(\dfrac{x^3 + y}{2 + 2\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ \dfrac{y^3 + 2x}{2 + x^2 + y^2}\right)$.

Sulla palla $B = \big\{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \le 4\big\}$, *calcolare* $\displaystyle\iint_B \mathrm{div} F(x,y)\,dx\,dy =$

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(x,y) = 0 \quad se \quad (x,y) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{\sin(x^{n+3})\sin(y^{n+4})}{(x^2+y^2)^{2n}} \quad se \quad (x,y) \neq 0 \ .$$

Per quali valori di $n \ge 1$ *la funzione* F *è differenziabile in* $(0,0)$?

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 9. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = 6xy - x^3 - 3y^2.$$

Trovare i punti critici di F *in* $\mathbb{R}^2$, *studiare la matrice hessiana e dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

Esercizio 10. *Dati la funzione*

$$F(x,y,z) = x + xy - z\,,$$

e l'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + (z-x)^2 \le 3\Big\}\,,$$

mostrare che l'estremo superiore $\sup\limits_D F$ *è raggiunto e calcolarlo.*

Esercizio 11. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{y(x^2+y^2)^5}{(x^2+y^2)^n + y^4} \quad ,$$

calcolare, in funzione del parametro $n \ge 1$, $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.
