Prova scritta – 12/9/2023

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

(A) $\Omega_A = \overline{B}_1(0,0) \setminus \partial B_1(2,0)$; (D) $\Omega_D = \overline{B}_1(0,0) \cup \partial B_1(2,0)$;

(B) $\Omega_B = \overline{B}_1(0,0) \cap \partial B_1(2,0)$; (E) $\Omega_E = B_1(0,0) \setminus \partial B_1(2,0)$;

(C) $\Omega_C = B_1(0,0) \cup \partial B_1(2,0)$; (F) $\Omega_F = \partial B_1(0,0) \cup \partial B_1(2,0)$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti :**

Gli insiemi seguenti sono **aperti :**

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti :**

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le y \le 2x \le 2 \Big\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{\sqrt{1+2(x+y)}}{\cos(x-y)} =$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(e^{2t} - \cos(3t)\, ,\ e^{3t} - \cos(2t) \Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{\ln(1+x+y)}{1+y}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. *Calcolare, al variare del parametro* $A \in \mathbb{R}$, *la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{1+\sin(Ay)}{1+Ax+y}$ *nel punto* $(0,0)$.

$H =$ *Per quali valori di* A *la matrice* H *è* **indefinita***?*

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (e^x - 2y)\,dx + (x+y)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le x+y \le 1\Big\}$ *in senso antiorario.*

Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left(\dfrac{xy+x}{3+x^2+y^2}\,,\, \dfrac{y-x}{1+2(x^2+y^2)}\right)$.

Sulla palla B *di centro* $(0,0)$ *e raggio* $\sqrt{2}$, *calcolare* $\displaystyle\iint_B \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy =$

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(x,y) = 0 \quad se \quad (x,y) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(1+x)^{n+2}(1+y)^{n-3}(x+y)^{n+5}}{(1+x^2)^n(1+y^2)^n(x^2+y^2)^n} \quad se \quad (x,y) \ne 0\ .$$

Per quali valori di $n \ge 1$ *la funzione* F *è differenziabile in* $(0,0)$*?*

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 9. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^3y - xy^2 + \frac{5}{9}y^3.$$

Trovare i punti critici di F *in* $\mathbb{R}^2$, *studiare la matrice hessiana e dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

Esercizio 10. *Dati la funzione*

$$F(x,y,z) = x + y - z\,,$$

e l'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + (x+y+z)^2 \le 3\Big\},$$

mostrare che l'estremo superiore $\sup\limits_D F$ *è raggiunto e calcolarlo.*

Esercizio 11. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{\sin(xy^2)}{x^2 + 2x^2y^2 + 2y^4}\quad,$$

calcolare $\limsup\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.
