Prova scritta – 9/1/2024

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

$$(A)\ \Omega_A = \Big([-1,1]\times[-1,1]\Big)\setminus B_1(0,0)\ ; \quad (D)\ \Omega_D = \Big([-1,1]\times[-1,1]\Big)\setminus \overline{B}_1(0,0)\ ;$$

$$(B)\ \Omega_B = \Big((-1,1)\times(-1,1)\Big)\setminus B_1(0,0)\ ; \quad (E)\ \Omega_E = \Big((-1,1)\times(-1,1)\Big)\setminus \overline{B}_1(0,0)\ ;$$

$$(C)\ \Omega_C = \Big((-1,1)\times(-1,1)\Big)\cap \overline{B}_1(0,0)\ ; \quad (F)\ \Omega_F = \Big([-1,1]\times[-1,1]\Big)\cap B_1(0,0)\ .$$

Gli insiemi seguenti sono **compatti**: A

Gli insiemi seguenti sono **aperti**: E, F

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti**: B, C, D

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2-2x\le y\le x\le 1\Big\}$$

$\partial D = \Big\{(x, x^2-2x) : x\in[0,1]\Big\} \cup \Big\{(x,x) : x\in[0,1]\Big\} \cup \Big\{(1,y) : y\in[-1,1]\Big\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{\cos(\sin x)\sqrt{1+x}}{1+\sin(xy)} = 1 + \frac{x}{2} - xy - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2+y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(e^{2t} - \cos(3t)\,,\ e^{\sin(3t)} - \sqrt{\cos t}\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{\cos(3x+2y)+\cos(2x-3y)}{1+x+y}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = -10$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{\cos y + \ln(1+xy)}{1+x^2}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *La matrice H è:* definita negativa

---

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (xy^2 + 2yx^2)\,dx + (x^2y + xy^2 + x^3)\,dy$ *e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \{(x,y) \, : \, x^2+y^2 \leq 3\}$ *in senso antiorario.*
Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \pi \frac{9}{2}$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \Big((3x-2y)\cos(x^2+y^2)\, ,\, x(y^2+x^2) + yx^2 + y^3\Big)$.
Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R = \sqrt{\pi}$, calcolare $\displaystyle\iint_{B_R} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy = \pi^2(\pi-3)$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^2y - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}y^2.$$

Trovare i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare il massimo della funzione*

$$F(x,y,z) = y - z\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; (x-y)^2 + (x-z)^2 + z^2 \leq 1\Big\}.$$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{x\sin(xy)}{(x^2+y^2)x^2 + y^2}\,,$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^4y^{2n+1}}{(x^4+y^4+2x^2y^2+3x^3y^3)^n} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

dove $n \geq 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.*

Analisi II – 9/1/2024

Es. 8 $F(x,y) = x^2y - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}y^2$

$$\begin{cases} \partial_x F = 2xy - x^2 \\ \partial_y F = x^2 - y \end{cases}$$

I punti critici di F sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \partial_x F(x,y) = 0 \\ \partial_y F(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xy - x^2 = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(2y - x) = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2(2x - 1) = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Soluzione 1. $x = y = 0$

Soluzione 2. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$.

Calcoliamo la matrice hessiana $D^2F = \begin{pmatrix} \partial_{xx}F & \partial_{xy}F \\ \partial_{yx}F & \partial_{yy}F \end{pmatrix}$.

In un punto generico (x,y) abbiamo

$$D^2F(x,y) = \begin{pmatrix} 2y-2x & 2x \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

- Nel punto $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, abbiamo

$$D^2F(1/2, 1/4) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1) - 1 = -1/2 .$$

Quindi la matrice $D^2F(1/2, 1/4)$ è indefinita e di conseguenza $(1/2, 1/4)$ è un punto di sella.

- Nel punto $(x,y) = (0,0)$, abbiamo

$$D^2F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Siccome

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad e \quad tr \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

abbiamo che $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ è una matrice <u>semi-definita negativa</u>.
Quindi l'analisi al secondo ordine non ci permette di determinare il carattere del punto critico $(0,0)$.

Studiamo la funzione F lungo la retta $\{y=0\}$.

$F(x,0) = -\frac{1}{3}x^3$. Abbiamo che:

$$\begin{cases} F(x,0) < 0, & \text{se } x>0; \\ F(x,0) = 0, & \text{se } x=0; \\ F(x,0) > 0, & \text{se } x<0. \end{cases}$$

Quindi $(0,0)$ non è un punto né di massimo, né di minimo locale per F. Allora, $(0,0)$ è un punto di sella.

Es. 9 Cerchiamo il massimo della funzione

$$F(x,y,z) = y - z$$

sull'insieme

$$D = \{(x,y,z) : (x-y)^2 + (x-z)^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Osserviamo che D è un insieme chiuso. Infatti, se (x_n, y_n, z_n) è una successione di punti tali che:

- $(x_n, y_n, z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x_\infty, y_\infty, z_\infty)$,
- $(x_n, y_n, z_n) \in D$ per ogni $n \geq 1$,

allora per la definizione di D

$$(x_n - y_n)^2 + (x_n - z_n)^2 + z_n^2 \leq 1.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$,

otteniamo che

$$(x_\infty - y_\infty)^2 + (x_\infty - z_\infty)^2 + z_\infty^2 \leq 1.$$

Quindi $(x_\infty, y_\infty, z_\infty) \in D$ e di conseguenza D è un insieme chiuso (per successioni).

<u>D è anche limitato</u>. Infatti, se $(x,y,z) \in D$, allora $(x-y)^2 + (x-z)^2 + z^2 \leq 1$.

In particolare $\begin{cases} |z| \leq 1 \\ |x-z| \leq 1 \\ |x-y| \leq 1 \end{cases}$

Per la disuguaglianza triangolare:

$$|x| \leq |x-z| + |z| \leq 1+1 = 2$$

Analogamente

$$|y| \leq |x-y| + |x| \leq 1+2 = 3.$$

In conclusione,

se $(x,y,z) \in D$, allora $\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| \leq 3 \\ |z| \leq 1 \end{cases}$

e quindi D è limitato.

Siccome F è continua e D è compatto, abbiamo che F ammette un massimo su D. Inoltre, siccome $\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, abbiamo che F non ha punti critici nella parte interna di D. Quindi, il massimo di F è raggiunto sul bordo ∂D. Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, possiamo cercare il massimo di F fra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \partial_x F = \lambda \partial_x G \\ \partial_y F = \lambda \partial_y G \\ \partial_z F = \lambda \partial_z G \\ G(x,y,z) = 1 \end{cases}$$

dove $G(x,y,z) = (x-y)^2 + (x-z)^2 + z^2$.

$$\begin{cases} 0 = 2\lambda(2x-y-z) \\ 1 = 2\lambda(y-x) \\ -1 = 2\lambda(2z-x) \\ (x-y)^2 + (x-z)^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Per la seconda e la terza equazione,

abbiamo che $\lambda \neq 0$. Quindi

$$2x - y - z = 0$$

ed il sistema diventa:

$$\begin{cases} y = 2x - z \\ 1 = 2\lambda(x - z) \\ -1 = 2\lambda(2z - x) \\ 2(x-z)^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Sommando la seconda e la terza equazione, otteniamo

che $z = 0$.

Ora, la quarta equazione implica che

$$2x^2 = 1$$

Quindi le soluzioni sono:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \sqrt{2}, \quad z = 0$$

e $\quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = -\sqrt{2}, \quad z = 0.$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 0\right) = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, 0\right) = -\sqrt{2}.$$

Quindi, il massimo di F è $\sqrt{2}$ ed è raggiunto nel punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 0\right) \in \partial D$.

<u>Es. 10</u>: $F(x,y) = \dfrac{x \sin(xy)}{(x^2+y^2)x^2+y^2}$.

Osserviamo che

$$\sin(xy) = xy + O(x^3y^3).$$

Quindi

$$F(x,y) = \frac{x^2y}{(x^2+y^2)x^2+y^2} + \frac{x\,O(x^3y^3)}{(x^2+y^2)x^2+y^2}.$$

Siccome

$$\left| \frac{x\,O(x^3y^3)}{(x^2+y^2)x^2+y^2} \right| \leq x\,\frac{|O(x^3y^3)|}{y^2}$$

$$\leq x\,|O(x^3y)| = o(1),$$

abbiamo che

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)x^2+y^2} = \limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y).$$

Calcoleremo quindi $\limsup\limits_{(x,y)\to(0,0)} G$, dove

$$G(x,y) = \frac{x^2y}{(x^2+y^2)x^2+y^2}.$$

In coordinate polari abbiamo:

$$G(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + \sin^2\theta}.$$

Fissato $r>0$, cerchiamo il massimo della funzione $G(r\cos\theta, r\sin\theta)$ per $\theta\in[0,2\pi]$.

Cerchiamo quindi le soluzioni di

$$\partial_\theta\left[G(r\cos\theta, r\sin\theta)\right] = 0,$$

dove r è un parametro (positivo).

$$\partial_\theta G = 0 \iff$$

$$\partial_\theta\left[\cos^2\theta\sin\theta\right]\cdot\left(r^2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) - \cos^2\theta\sin\theta\cdot\partial_\theta\left[r^2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right] = 0$$

$$\iff \left(\cos^3\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\right)\left(r^2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) - \cos^2\theta\sin\theta\left(-2\sin\theta\cos\theta\cdot r^2 + 2\sin\theta\cos\theta\right) = 0.$$

$$\iff \left(\cancel{\cos^3\theta\sin^2\theta} - 2\sin^4\theta\cos\theta - \cancel{2}\sin^2\theta\cos^3\theta\right) + r^2\left(\cos^5\theta - \cancel{2\sin^2\theta\cos^3\theta} + \cancel{2\cos^3\theta\sin^2\theta}\right) = 0$$

$$\iff \quad \tau^2\cos^5\theta - 2\sin^4\theta\cos\theta - \sin^2\theta\cos^3\theta = 0$$

$$\iff \quad \cos\theta\left[\tau^2\cos^4\theta - 2\sin^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta\right] = 0$$

Una soluzione è $\cos\theta = 0$. In questo caso $G = 0$.

Se invece $\cos\theta \neq 0$, abbiamo l'equazione

$$\tau^2\cos^4\theta - 2\sin^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta = 0$$

Poniamo $\sin^2\theta = X$ (in particolare: $X \in [0,1]$). Quindi:

$$2X^2 + X(1-X) - \tau^2(1-X)^2 = 0$$

$$\iff (1-\tau^2)X^2 + (1+2\tau^2)X - \tau^2 = 0.$$

$$\iff X_{1,2} = \frac{-(1+2\tau^2) \pm \sqrt{(1+2\tau^2) + 4\tau^2(1-\tau^2)}}{2(1-\tau^2)}$$

$$= \frac{-(1+2\tau^2) \pm \sqrt{1+6\tau^2-4\tau^4}}{2(1-\tau^2)}$$

$$= \frac{-(1+2\tau^2) \pm (1+3\tau^2) + o(\tau^2)}{2(1-\tau^2)}$$

$$X_1 = \frac{1}{2}\tau^2 + o(\tau^2)$$

$$X_2 = \frac{-2-5\tau^2}{2(1-\tau^2)} + o(\tau^2) = -\frac{1}{2}(2+5\tau^2)(1+\tau^2) + o(\tau^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(2+7\tau^2\right) + o(\tau^2)$$

Siccome $X \in [0,1]$, abbiamo che l'unica soluzione è

$$X = \sin^2\Theta = \frac{1}{2}\tau^2 + o(\tau^2); \quad \cos^2\Theta = 1 - \frac{1}{2}\tau^2 + o(\tau^2)$$

Quindi

$$\lim_{\tau\to 0}\left(\sup_{\Theta}\left\{G(\tau\cos\Theta, \tau\sin\Theta)\right\}\right)$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{\tau\left(1-\frac{3}{4}\tau^2+o(\tau^2)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tau+o(\tau)\right)}{\tau^2\left(1-\frac{3}{4}\tau^2+o(\tau^2)\right)+\frac{3}{4}\tau^2+o(\tau^2)}$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\tau^2+o(\tau^2)}{\frac{7}{4}\tau^2+o(\tau^2)} = \frac{2\sqrt{3}}{7}.$$

In conclusione:

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(xy)}{x^2(x^2+y^2)+y^2} = \frac{2\sqrt{3}}{7}.$$

Es. 11: Consideriamo la funzione

$$F(x,y) = \frac{x^4 y^{2n+1}}{(x^4+y^4+2x^2y^2+2x^3y^3)^n} \quad \text{per } (x,y) \neq (0,0).$$

① Siccome $\begin{cases} F(x,0) = 0 & \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \\ F(0,y) = 0 & \text{per ogni } y \in \mathbb{R}, \end{cases}$

abbiamo che la funzione F è derivabile in $(0,0)$ e

$$\partial_x F(0,0) = \partial_y F(0,0) = 0.$$

② Per studiare la continuità di F in $(0,0)$,

osserviamo che

$$F(x,y) = \frac{x^4 y^{2n+1}}{(x^4+y^4+2x^2y^2+2x^3y^3)^n}$$

$$= \frac{x^4 y^{2n+1}}{\left((x^2+y^2)^2 + 2x^3y^3\right)^n}$$

$$= \frac{x^4 y^{2n+1}}{(x^2+y^2)^{2n}} \cdot \frac{1}{\left(1 + 2\frac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^2}\right)^n}.$$

Siccome (per un qualsiasi $n \geq 1$)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\left(1 + 2\frac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^2}\right)^n} = 1,$$

abbiamo che:

$$\boxed{\begin{array}{l} F \text{ è continua in } (0,0) \\ \text{se e solo se} \\ G(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^4 y^{2n+1}}{(x^2+y^2)^{2n}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \\ \text{è continua in } (0,0). \end{array}}$$

Per studiare la continuità di G in $(0,0)$ scriviamo la funzione in coordinate polari:

$$G(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^{2n+5} (\cos\theta)^4 (\sin\theta)^{2n+1}}{(r^2)^{2n}}$$

$$= r^{5-2n} (\cos\theta)^4 (\sin\theta)^{2n+1}.$$

<u>Caso 1.</u> Se $n = 1, 2$, allora $5-2n > 0$

e quindi:

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} G(x,y) = \lim_{r\to 0} \Big(r^{5-2n} \underbrace{\sup_{\theta} \{ (\cos\theta)^4 (\sin\theta)^{2n+1} \}}_{\text{non dipende da } r!} \Big) = 0$$

e analogamente

$$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} G(x,y) = \lim_{r\to 0} \Big(r^{5-2n} \inf_{\theta} \{ (\cos\theta)^4 (\sin\theta)^{2n+1} \} \Big) = 0$$

Quindi: per $n=1,2$, F è continua in $(0,0)$.

<u>Caso 2.</u> Se $n \geq 3$, allora $5-2n < 0$.

In questo caso:

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} G(x,y) = \lim_{r\to 0} \left\{ r^{5-2n} \overbrace{\sup_{\theta} \left\{ (\cos\theta)^4 (\sin\theta)^{2n+1} \right\}} \right\}$$

Siccome $\sup_{\theta} \left| (\cos\theta)^4 (\sin\theta)^{2n+1} \right|$

è una costante (non dipende da r)

strettamente positiva, abbiamo che

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} G(x,y) = +\infty .$$

Quindi, per $n \geq 3$, F non è continua in $(0,0)$.

---

③ Osserviamo che F è differenziabile in $(0,0)$

se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y) - F(0,0) - (x,y)\cdot \nabla F(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Siccome $F(0,0) = 0$ e $DF(0,0) = (0,0)$,

abbiamo che F è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 .$$

Come nel punto precedente, abbiamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\text{dove } G(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{x^4 y^{2n+1}}{(x^2+y^2)^{2n}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

In coordinate polari

$$\frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^4 (\cos\theta)^4 \cdot r^{2n+1} (\sin\theta)^{2n+1}}{r^{4n+1}}$$

$$= r^{4-2n} (\cos\theta)^4 (\sin\theta)^{2n+1}.$$

Consideriamo tre casi.

<u>Caso 1.</u> $n = 1$. Allora

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \left\{ \sup_{\theta} \left\{ r^2 (\cos\theta)^4 (\sin\theta)^{2n+1} \right\} \right\}$$

$$= \lim_{r\to 0} \left\{ r^2 \sup_{\theta} \left\{ (\cos\theta)^4 (\sin\theta)^{2n+1} \right\} \right\} = 0$$

Analogamente

$$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \left\{ \inf_{\theta} \left\{ r^2 (\cos\theta)^4 (\sin\theta)^{2n+1} \right\} \right\} = 0.$$

Quindi, per $n=1$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

e di conseguenza la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.

Caso 2. $n=2$.

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \left\{ \sup_{\theta} (\cos\theta)^4 (\sin\theta)^{2n+1} \right\}$$

$$= \sup_{\theta} \left\{ (\cos\theta)^4 (\sin\theta)^{2n+1} \right\}$$

Analogamente

$$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \inf_{\theta} \left\{ (\cos\theta)^4 (\sin\theta)^{2n+1} \right\}.$$

Siccome la funzione

$$(\cos\theta)^4 (\sin\theta)^{2n+1}$$

non è costante, abbiamo che

$$\sup_{\theta} \left\{ (\cos\theta)^4 (\sin\theta)^{2n+1} \right\} \neq \inf_{\theta} \left\{ (\cos\theta)^4 (\sin\theta)^{2n+1} \right\}$$

Di conseguenza,

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq \liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

e quindi il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{non esiste}$$

e la funzione F non è differenziabile in $(0,0)$.

Caso 3. $n \geq 3$.

In questo caso

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{z\to 0} \left\{ \frac{1}{z^{2n-4}} \sup_{\theta} \left\{ (\cos\theta)^4 (\sin\theta)^{2n+1} \right\} \right\}.$$

Siccome

$$\sup_{\theta} \left\{ (\cos\theta)^4 \cdot (\sin\theta)^{2n+1} \right\} > 0,$$

abbiamo che

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\infty$$

e quindi $\dfrac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ <u>non</u> ammette limite in $(0,0)$

e la funzione F non è differenziabile in $(0,0)$.

In conclusione,

F è differenziabile in $(0,0) \iff n = 1$.