

---

**Prova scritta – 5/6/2024**

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

---

Nome:

---

Cognome:

---

**Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)**

**Esercizio 1.** Consideriamo gli insiemi

$$(A) \Omega_A = B_2(0,0) \setminus B_1(1,0) ; \quad (D) \Omega_D = \overline{B_2}(0,0) \setminus \overline{B_1}(1,0) ;$$

$$(B) \Omega_B = \overline{B_2}(0,0) \setminus B_1(1,0) ; \quad (E) \Omega_E = B_2(0,0) \setminus \overline{B_1}(1,0) ;$$

$$(C) \Omega_C = \partial B_2(0,0) \cup \partial B_1(1,0) ; \quad (F) \Omega_F = \partial B_2(0,0) \setminus \partial B_1(1,0) .$$

---

*Gli insiemi seguenti sono **compatti**:*

*Gli insiemi seguenti sono **aperti**:*

*Gli insiemi seguenti non sono né aperti, né compatti:*

---

**Esercizio 2.** Trovare la frontiera dell'insieme

$$D = B_1(0,0) \setminus \left\{ (t,0) \in \mathbb{R}^2 : t > 0 \right\}$$

$$\partial D =$$

---

**Esercizio 3.** Sviluppare fino al secondo ordine in  $(0,0)$  la funzione

$$\frac{e^{x-y} \sin(x-y)}{\sqrt{1-3y+xy}} =$$

---

**Esercizio 4.** Siano  $\gamma(t) = \left( \cos(2t) - \frac{e^t}{\cos t}, \frac{\sin(2t)}{\cos(3t)} \right)$  e  $F(x,y) = e^{y-x} \sqrt{\cos(3x-y)}$ .

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

---

**Esercizio 5.** Calcolare, al variare del parametro  $A \in \mathbb{R}$ , la matrice hessiana  $H$  della funzione  $F(x, y) = \frac{(1 + Axy) \cos(2x + xy)}{\sqrt{1 + 3y^2}}$  nel punto  $(0, 0)$ .

$H =$

Per quali valori di  $A$  la matrice  $H$  è definita negativa?

---

**Esercizio 6.** Sia  $\alpha = (x^2 + xy) dx + (x^2 - y^2) dy$  e sia  $\gamma$  la curva semplice chiusa e  $C^1$  a tratti che parametrizza il bordo del dominio  $\Omega = \{(x, y) : 0 < y < x - x^2\}$  in senso antiorario.

Calcolare  $\int_{\gamma} \alpha =$

---

**Esercizio 7.** Consideriamo il campo  $F(x, y) = \left( \frac{x^3 - xy}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{y^3}{3 + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ .

Dato l'insieme  $\Omega = B_2(0, 0)$ , calcolare  $\iint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y) dx dy =$

---

**Parte 2.** Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

---

**Esercizio 8.** Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = (x^2 + xy + x)e^{x-y}.$$

Trovare i punti critici di  $F$  in  $\mathbb{R}^2$ . Studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

---

**Esercizio 9.** Trovare l'estremo superiore della funzione

$$F(x, y, z) = y + z,$$

sull'insieme

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (x + y + z)^2 \leq 2 \right\}.$$

---

**Esercizio 10.** Data la funzione

$$F(x, y) = \frac{\sin(xy)}{3x^2 + y^2},$$

trovare  $\limsup_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$ .

---

**Esercizio 11.** Consideriamo la funzione

$$F(0, 0) = 0 \quad e \quad F(x, y) = \frac{(x + xy)^{n+2}(y - xy)^{n+5}}{(x^2 + xy^2 + y^2)^{2n}} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0).$$

Per quali valori del parametro intero  $n \geq 1$  la funzione  $F$  è differenziabile in  $(0, 0)$ ?

---