Teorema della funzione inversa. Una dimostrazione in dimensione due

Una versione più generale del teorema di Dini

Teorema 1. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e tale che*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad \partial_x F(0,0) \neq 0.$$

Allora esistono $L > 0$, $B > 0$, $A > 0$ ed una funzione

$$\eta : [-L, L] \times [-B, B] \to \mathbb{R}$$

tale che:

(i) *Per ogni $\ell \in [-L, L]$ e per ogni punto $(x, y) \in [-A, A] \times [-B, B]$, si ha che*

$$F(x, y) = \ell \qquad \text{se e solo se} \qquad x = \eta(\ell, y).$$

(ii) *La funzione di due variabili η è:*

- *continua su $[-L, L] \times [-B, B]$;*
- *differenziabile e di classe C^1 su $(-L, L) \times (-B, B)$.*

Osservazione: Consideriamo gli insiemi

$$\Omega := \Big\{(x, y) \ : \ y \in (-B, B),\ \eta(-L, y) < x < \eta(L, y)\Big\},$$

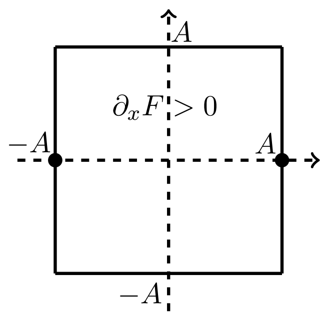
$$\mathcal{R} = (-L, L) \times (-B, B).$$

La mappa

$$\Phi : \Omega \to \mathcal{R}_1, \qquad \Phi(x, y) = \big(F(x, y), y\big),$$

è un diffeomorfismo tra Ω e $\mathcal{R}$. La sua inversa è la mappa

$$\Psi : \mathcal{R} \to \Omega, \qquad \Psi(\ell, y) = \big(\eta(\ell, y), y\big).$$

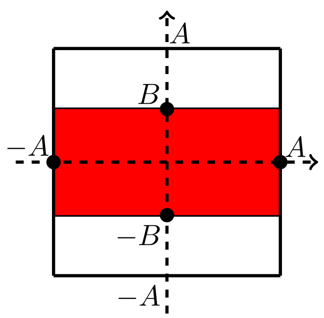


Dimostrazione:

- **Costruzione di η.**

Scegliamo prima $A > 0$ in modo tale che

$$\partial_x F(x, y) > 0 \qquad \text{per ogni} \quad (x, y) \in [-A, A] \times [-A, A].$$



Siccome $F(0, 0) = 0$ e la funzione $x \mapsto F(x, 0)$ è crescente, abbiamo che

$$F(A, 0) > 0 \qquad \text{e} \qquad F(-A, 0) < 0.$$

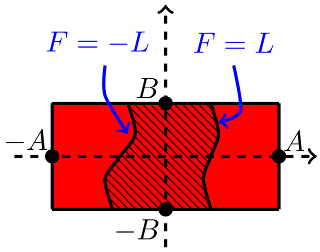
Per la continuità di F, esiste $B \in (0, A)$ tale che

$$F(A, y) > 0 \qquad \text{per ogni} \quad y \in [-B, B];$$

$$F(-A, y) < 0 \qquad \text{per ogni} \quad y \in [-B, B].$$

Definiamo $L > 0$ come il più piccolo fra

$$\frac{1}{2}\min_{y\in[-B,B]} F(A,y) \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2}\min_{y\in[-B,B]} |F(-A,y)|.$$



Osserviamo che, fissati $\ell \in [-L, L]$ e $y \in [-B, B]$, esiste un unico $x \in [-A, A]$ tale che $F(x, y) = \ell$. Questo x sarà per definizione $\eta(\ell, y)$. Quindi, per costruzione, $F\big(\eta(\ell, y), y\big) = \ell$.

- **Continuità di η.** Siano $\ell_n \in [-L, L]$ e $y_n \in [-B, B]$ due successioni convergenti, con limiti

  $$\ell_\infty \in [-L, L] \qquad \text{e} \qquad y_\infty \in [-B, B].$$

  Inoltre, siccome la successione $\eta(\ell_n, y_n)$ è limitata, a meno di estrarre una sottosuccessione, possiamo supporre che $\eta(\ell_n, y_n)$ è convergente. Definiamo quindi

  $$\eta_\infty = \lim_{n\to\infty} \eta(\ell_n, y_n).$$

  Per definizione di η, abbiamo che

  $$F(\eta(\ell_n, y_n), y_n) = \ell_n.$$

  Usando la continuità di F, abbiamo che

  $$F(\eta_\infty, y_\infty) = \ell_\infty.$$

  Per definizione quinidi abbiamo che

  $$\eta_\infty = \eta(\ell_\infty, y_\infty),$$

  il che dimostra la continuità di η.

- **Derivabilità di η nella variabile ℓ.** Fissiamo

  $$\ell \in (-L, L) \qquad \text{e} \qquad y \in (-B, B).$$

  Allora, abbiamo che per ogni δ di modulo abbastanza piccolo si ha

  $$F\big(\eta(\ell + \delta, y), y\big) = \ell + \delta.$$

  Usando la differenziabilità di F e la continuità di η, abbiamo che esiste una funzione E tale che

  $$\lim_{t\to 0^+} \frac{E(t)}{t} = 0$$

  e

  $$\begin{aligned}\delta &= F\big(\eta(\ell + \delta, y), y\big) - F\big(\eta(\ell, y), y\big) \\ &= \Big(\eta(\ell + \delta, y) - \eta(\ell, y)\Big)\partial_x F\big(\eta(\ell, y), y\big) + E\big(\eta(\ell + \delta, y) - \eta(\ell, y)\big).\end{aligned}$$

  Dividendo per δ, abbiamo che

  $$1 = \left(\partial_x F\big(\eta(\ell, y), y\big) + \frac{E\big(\eta(\ell + \delta, y) - \eta(\ell, y)\big)}{\eta(\ell + \delta, y) - \eta(\ell, y)}\right) \frac{\eta(\ell + \delta, y) - \eta(\ell, y)}{\delta}.$$

  Di conseguenza esiste

  $$\partial_\ell \eta(\ell, y) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\eta(\ell + \delta, y) - \eta(\ell, y)}{\delta} = \frac{1}{\partial_x F\big(\eta(\ell, y), y\big)}.$$

- **Derivabilità di η nella variabile y.** Come nel teorema della funzione implicita abbiamo che η è derivabile nella seconda variabile e

  $$\partial_y \eta(\ell, y) = -\frac{\partial_y F\big(\eta(\ell, y), y\big)}{\partial_x F\big(\eta(\ell, y), y\big)}.$$

- **Differenziabilità di η.** Siccome le derivate parziali di η sono continue, abbiamo che η è differenziabile in ogni punto (ℓ, y) di $(-L, L) \times (-B, B)$. $\square$

Teorema 2 (Teorema della funzione inversa)**.** *Sia*

$$\Phi = (F, G) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

una funzione di classe C^1 e tale che

$$\Phi(0,0) = (0,0) \qquad e \qquad \det\begin{pmatrix} \partial_x F(0,0) & \partial_y F(0,0) \\ \partial_x G(0,0) & \partial_y G(0,0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Allora esistono:

- *un intorno aperto Ω di $(0,0)$;*
- *un rettangolo $\mathcal{R} = (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta)$;*
- *una funzione $\Psi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^2$;*

tali che:

(i) *La mappa Ψ è di classe C^1 su $\mathcal{R}$*

(ii) *La mappa $\Phi : \Omega \to \mathcal{R}$ è bigettiva e $\Psi : \mathcal{R} \to \Omega$ è la sua inversa.*

Dimostrazione. Dimostreremo il teorema supponendo che

$$\partial_x F(0,0) > 0 \qquad \text{e} \qquad \det\begin{pmatrix} \partial_x F(0,0) & \partial_y F(0,0) \\ \partial_x G(0,0) & \partial_y G(0,0) \end{pmatrix} > 0.$$

Sia $A > 0$ tale che

$$\partial_x F > 0 \qquad \text{e} \qquad \det\begin{pmatrix} \partial_x F & \partial_y F \\ \partial_x G & \partial_y G \end{pmatrix} > 0 \qquad \text{in} \qquad [-A, A] \times [-A, A].$$

Usando il teorema precedente, esistono $L > 0$, $B > 0$ ed una funzione

$$\eta : (-L, L) \times (-B, B) \to \mathbb{R}$$

Consideriamo gli insiemi

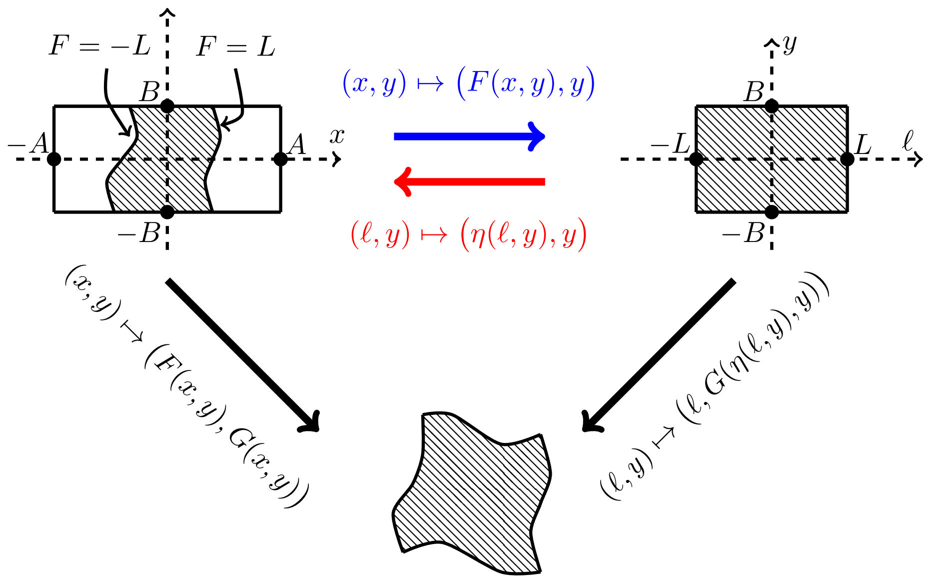
$$\Omega_1 := \Big\{(x, y) \ : \ y \in (-B, B),\ \eta(-L, y) < x < \eta(L, y)\Big\}.$$

e $\mathcal{R}_1 = (-L, L) \times (-B, B)$ e la mappa

$$\Phi_1 : \Omega_1 \to \mathcal{R}_1, \qquad \Phi_1(x, y) = \big(F(x, y), y\big).$$

Allora, la mappa Φ_1 è un diffeomoerfismo e la sua inversa è data da

$$\Psi_1 : \mathcal{R}_1 \to \Omega_1 \ , \qquad \Psi_1(\ell, y) = \big(\eta(\ell, y), y\big).$$



Ora, osserviamo che

$$\partial_y\Big[G\big(\eta(\ell,y),y\big)\Big] = \partial_y\eta(\ell,y)\,\partial_x G\big(\eta(\ell,y),y\big) + \partial_y G\big(\eta(\ell,y),y\big).$$

Siccome,

$$F\big(\eta(\ell,y),y\big) = \ell,$$

derivando nella variabile y, abbiamo

$$\partial_y\eta(\ell,y)\,\partial_x F\big(\eta(\ell,y),y\big) + \partial_y F\big(\eta(\ell,y),y\big) = 0,$$

otteniamo

$$\partial_y\Big[G\big(\eta(\ell,y),y\big)\Big] = \frac{\partial_x F\big(\eta(\ell,y),y\big)\,\partial_y G\big(\eta(\ell,y),y\big) - \partial_y F\big(\eta(\ell,y),y\big)\,\partial_x G\big(\eta(\ell,y),y\big)}{\partial_x F\big(\eta(\ell,y),y\big)} > 0\,.$$

Applichiamo il Teorema 1 alla funzione

$$\Phi_2(\ell,y) = \Big(\ell, G\big(\eta(\ell,y),y\big)\Big),$$

definita per $\ell \in (-L,L)$ e $y \in (-B,B)$. Esistono quindi $K>0$, $a \in (0,L)$ ed una funzione

$$\mu : (-a,a)\times(-K,K) \to \mathbb{R},$$

tale che la mappa

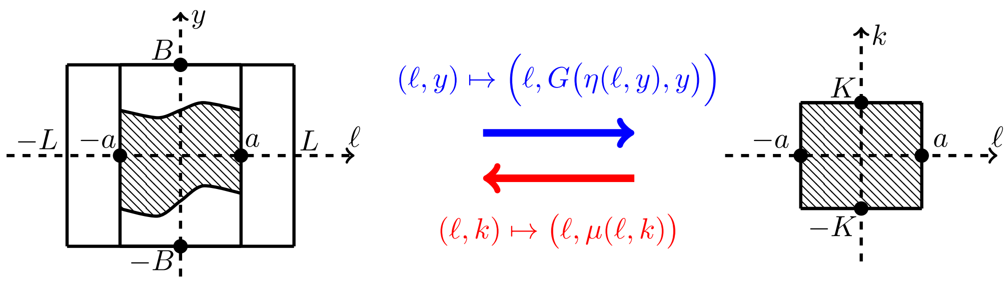
$$\Phi_2 : \Omega_2 \to \mathcal{R}_2, \qquad \Phi_2(\ell,y) = \Big(\ell, G\big(\eta(\ell,y),y\big)\Big).$$

è un diffeomorfismo e la sua inversa è della forma da

$$\Psi_2 : \mathcal{R}_2 \to \Omega_2\ , \qquad \Psi_2(\ell,k) = \big(\ell,\mu(\ell,k)\big),$$

dove

$$\mathcal{R}_2 := (-a,a)\times(-K,K),$$
$$\Omega_2 := \Big\{(\ell,y)\ :\ \ell\in(-a,a);\ \mu(\ell,-K) < y < \mu(\ell,K)\Big\} \subset \mathcal{R}_1\,.$$



Infine, la mappa

$$\Psi_1\circ\Psi_2 : \mathcal{R}_2 \to \Psi_1(\Omega_2),$$

è l'inversa di

$$(F,G) : \Psi_1(\Omega_2) \to \mathcal{R}_2.$$

□

Esempio 3. *La mappa*

$$\Phi : (0,+\infty)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\ :\ x>0\}, \qquad \Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

è bigettiva e di classe C^1, con inversa di classe C^1.

Esempio 4. *La mappa*

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}, \qquad \Phi(t,\theta) = (e^t\cos\theta, e^t\sin\theta)$$

è tale che

$$\det \mathrm{J}\Phi > 0 \quad su \quad \mathbb{R}^2,$$

ma non è bigettiva.