Qualche osservazione sulle nozioni di o-piccolo e della differenziabilità

Definizione di o-piccolo

Definizione 1 (**o-piccolo**). *Data una funzione*

$$F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},$$

ed un numero naturale $k \geq 0$, diciamo che

$$F(X) = o\Big(|X|^k\Big),$$

se

$$\lim_{X \to 0} \frac{F(X)}{|X|^k} = 0,$$

ovvero se

$$\text{Per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } \delta > 0 \text{ tale che:} \quad 0 < |X| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{|F(X)|}{|X|^k} < \varepsilon.$$

Somma di o-piccoli

Osservazione 2. *Supponiamo che*

$$F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad e \qquad G : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}.$$

siano due funzioni tali che

$$F(X) = o(|X|^k) \qquad e \qquad G : (X) = o(|X|^k),$$

per un qualche $k \geq 0$. Allora

$$F(X) + G(X) = o(|X|)^k.$$

Definizione di differenziabilità

Definizione 3 (**o-piccolo**). *Data una funzione*

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

diciamo che F **è differenziabile** *in 0, se esiste un vettore $V \in \mathbb{R}^n$ tale che*

$$F(X) - F(0) - V \cdot X = o\big(|X|\big).$$

Osservazione 4. *Sappiamo che se una funzione F è differenziabile, allora esistono le derivate parziali $\partial_{x_j} F(0)$ per ogni $j = 1, \dots, n$ e*

$$\nabla F(0) = \Big(\partial_{x_1} F(0),\, \partial_{x_2} F(0),\, \dots,\, \partial_{x_n} F(0)\Big) = V.$$

In particolare, questo implica che il vettore V è unico e che

$$F(X) - F(0) - X \cdot \nabla F(0) = o\big(|X|\big).$$

Una dimostrazione alternativa dell'unicità del vettore V

Proposizione 5. *Consideriamo una funzione*

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Supponiamo che esistono due vettori

$$V \in \mathbb{R}^n \qquad e \qquad W \in \mathbb{R}^n$$

tali che

$$F(X) - F(0) - V \cdot X = o\big(|X|\big) \qquad e \qquad F(X) - F(0) - V \cdot X = o\big(|X|\big).$$

Allora $V = W$.

Dimostrazione. Allora, anche

$$(V - W) \cdot X = o(|X|).$$

Supponiamo per assurdo che $V - W \neq 0$ e fissiamo $\delta > 0$. Consideriamo il vettore

$$X = \delta(V - W).$$

Allora,

$$\frac{(V - W) \cdot X}{|X|} = \frac{\delta|V - W|^2}{\delta|V - W|} = |V - W|.$$

Di conseguenza, per ogni $\delta > 0$ esiste un vettore X tale che

$$0 < |X| < \delta \qquad \text{e} \qquad \frac{(V - W) \cdot X}{|X|} = |V - W|,$$

e quindi

$$(V - W) \cdot X \neq o(|X|).$$

□

Una proposizione utile per gli esercizi sulla differenziabilità

Proposizione 6. *Consideriamo due funzioni*

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad e \qquad G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Supponiamo che

$$F(0) = G(0) \qquad e \qquad F(X) = G(X) + o(|X|).$$

Allora

$$F \text{ è differenziabile in } 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad G \text{ è differenziabile in } 0\ .$$

Inoltre, se F e G sono differenziabili in zero, allora

$$\nabla F(0) = \nabla G(0).$$

Dimostrazione. Supponiamo che G sia differenzaibile in zero. Allora,

$$G(X) - G(0) - X \cdot \nabla G(0) = o(|X|).$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} F(X) = G(X) + \big(F(X) - G(X)\big) &= G(0) + X \cdot \nabla G(0) + o(|X|) + o(|X|) \\ &= F(0) + X \cdot \nabla G(0) + o(|X|), \end{aligned}$$

e quindi F è differenziabile in zero e $\nabla F(0) = \nabla G(0)$. Per dimostrare il viceversa, basta osservare che

$$F(X) = G(X) + o(|X|) \qquad \Leftrightarrow \qquad G(X) = F(X) + o(|X|).$$ □

Esempio 7. *Consideriamo le funzioni*

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , \qquad F(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , \qquad G(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Allora,

$$F \text{ è differenziabile in } 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad G \text{ è differenziabile in } 0 \ .$$

Infatti,

$$\sin(xy) = xy + o\big(x^2 + y^2\big).$$

Di conseguenza,

$$F(x,y) - G(x,y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sin(xy) - xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{o\big(x^2+y^2\big)}{\sqrt{x^2+y^2}} = o\Big(\sqrt{x^2+y^2}\Big).$$