Teorema del differenziale

Teorema del differenziale

Teorema 1 (Teorema del differenziale). *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in Ω. Se (tutte) le derivate parziali*

$$\partial_i F : \Omega \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, d,$$

sono continue nel punto $X \in \Omega$, allora F è differenziabile in X.

Dimostrazione in dimensione due. Sia $X = (x, y)$.
Per il teorema di Rolle, dato $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, esistono $h' \in (0, h)$ e $k' = (0, k)$ tali che

$$\begin{aligned} F(x+h, y+k) - F(x, y) &= \Big(F(x+h, y+k) - F(x+h, y)\Big) + \Big(F(x+h, y) - F(x, y)\Big) \\ &= k\,\partial_y F(x+h, y+k') + h\,\partial_x F(x+h', y). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} F(x+h, y+k) &- F(x, y) - h\,\partial_x F(x, y) + k\,\partial_y F(x, y) \\ &= k\Big(\partial_y F(x+h, y+k') - \partial_y F(x, y)\Big) + h\Big(\partial_x F(x+h', y) - \partial_x F(x, y)\Big). \end{aligned}$$

Usando la continuità di $\partial_x F$ e $\partial_y F$, abbiamo che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Big(\partial_y F(x+h, y+k') - \partial_y F(x, y)\Big) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \Big(\partial_x F(x+h', y) - \partial_x F(x, y)\Big) = 0.$$

Si ha quindi che

$$k\Big(\partial_y F(x+h, y+k') - \partial_y F(x, y)\Big) + h\Big(\partial_x F(x+h', y) - \partial_x F(x, y)\Big) = o\Big(\sqrt{h^2 + k^2}\Big),$$

il che conclude la dimostrazione. □

Corollario 2. *Tutte le funzioni ottenute facendo somme, prodotti e composizioni di funzioni elementari (x^n, e^x, $\sin x$, $\cos x, \dots$), calcolate nei vari componenti di $X = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, sono funzioni differenziabili (nei punti nei quali sono definite). Per esempio, la funzione*

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{e^{xy} - x^2}}{1 + \sin y}$$

è differenziabile sul suo dominio di definizione.